はじめに

谷津綱一

受験生は時に，読みとった情報を**整理**し，与えられた条件より**推察**し，手間をかけつぶさに**調べ**，丹念かつ慎重に**確かめ**，解法を簡潔に**まとめる**べく問題と出くわし対峙します．

理解力，洞察力，判断力，正確性，表現力，…．文字にすると難解ですが，“数学を解く”とは，無意識のうちにいずれもを養い，なお且つ頭の中で廻らす秩序を，より明快で正しいものへと誘います．

ところで，入試問題は高校からのメッセージと言えます．

ある高校では半年以上前から，作題に取りかかると伺いました．

‘入学して欲しい生徒像’

‘身に着いているべき力’

‘これまでの学習の真価’

想像するにこうした論点を発し，設問のフレームはもとより誘導の方向性の微細に至るまで，議論に議論を重ね，検討に検討が重ねられ，その終着点としての高校入試問題なのです．

入試問題は先生方の魂が吹き込まれた渾身の 1 題であり，同時にそれは受験生への挑戦状でもあります．

『月刊「高校への数学」 ワンポイント・ゼミ』は，高校入試問題の攻略を目的とし，今も書き連ねています．その中からここに，とっておきの 52 編を選りすぐりました．いつも年度初めに込める言葉“知って得をする受験に必要な知識”の集大成であって，なにより難関高校への合格を最大の宿願とします．

本書で特にこだわったのは，問題への最適なアプローチの選択眼を養うことです．入試では，発信されるメッセージや仕掛けを短時間で的確に見抜き読み解かないと，思わぬ苦闘にさらされ跳ね付けられることになるのです．<u>メッセージに潜む隠された鍵は何か</u>，本書はこの核心を露わにし突破の糸口を目の前に提示します．

皆さんの第一志望校合格という夢へ，一歩でも近づくお手伝いができれば幸いです．

2016 年 2 月

本書の使い方

■ 本書の特長

ワンテーマにつき見開き 2 ページ完結の構成です．

始める順序を違えてもさしつかえないよう，すべてのテーマに等しく説明と問題，それを継ぐ解法を載せているので，いま必要なテーマに絞った学習ができます．

■ 本書の構成

『数』，『関数とグラフ』，『平面図形』，『立体図形』という，高校入試の主要分野を本書の柱としています．

中でも特に，‘知識の差が物を言うテーマ’を殊の外集めました．知っているか知らないか，解いたことがあるか無いか．この事が受験の合否を占めやすいテーマばかりが並んでいます．実際の高校入試問題が主な題材ですので，臨場感を伴いながらにしてポイントが確認できるようになっています．

さらに巻末には，本書の要点や登場する重要定理・公式が一堂に会した『インデックス』も設けています．内容を整理するのに適しています．

■ 本書の進め方

“理解と確認”→“定着”→“実践”という 3 つの工程の流れを意識してください．

・最初は“理解と確認”

すぐさまペンを手にするより，まずはゆっくりと目を通すことより始めてください．ひとまず目で追って理解すること，それも繰り返しなぞることをお奨めします．説明や解法で気になったポイントや重要な手筋を洗い出し，手許のノートへ書き留めましょう．これを「まとめノート」とします．この新たな知識との出会いこそが，自分だけのオリジナルな参考書を完成させます．

・次は“定着”

数学で伸びずに苦労するのは，分かったつもりに陥っている状態の時です．

そこでいよいよ読むことから解く段階へと昇段します．理解した引き出しがいざ使いこなせるかの試してみます．ここが最も苦しいですが，自力で問題の鍵をこじ開けてみましょう．

注意するのは，計算をぐちゃぐちゃと隅に追いやるのではなく，後の見直しでも解法がすぐ復唱できるよう，道筋を描いておくことの大事さです．これを「解法ノート」とします．

事実入試でも，過程の跡に加点がなされたり，逆に答えのみでは正解として認められないケースもあると聞きます．

・そしていよいよ“実践”

もし十分な力が着いたら，本書の解法を真似るのではなく，いわゆる別解を掘り当ててみてください．「自分だったらこう解く」という意志は，数学を伸ばす上で大切なことです．ひとりひとりの得意技が生まれるのもこうした体験からです．

・最後に大切な“意欲”

‘もっと知りたい’，‘より学びたい’．こうした意欲が最後は合格へと導きます．くじけそうになってもめげずに粘り強く臨みやり遂げてください．

目　次

入試を勝ち抜く数学ワザ①

ベン図を活かす，ベン図で活かす

次は，00 年の国学院高校の問題です，

> **問題** 1．100 以下の正の整数のうちで，3 の倍数であって，5 の倍数でないものの個数を求めよ．

解法　まず，100 以下の 3 の倍数の個数は，

$$100 \div 3 = 33.3\cdots$$

よって，33 個あることがわかります．

そして次に，その中から 5 の倍数であるものを除いていきます．

3，6，9，12，~~15~~，18，21，24，27，~~30~~，…

つまり，15(3×5)の倍数を取り除けばよいのですね．

ところで，100 以下の 15 の倍数の個数は，

$$100 \div 15 = 6.6\cdots$$

より，6 個とわかります．

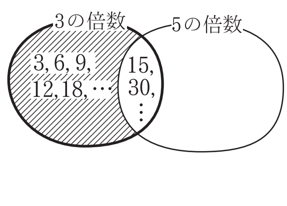
したがって，題意を満たすものの個数は，

$$33 - 6 = \mathbf{27}\ (\textbf{個})$$

となります．

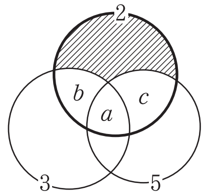
以上，ずらずらと書いてきましたが，これがもし，「(＊) 2 の倍数であって，3 でも 5 でも割り切れないものの個数」となるとどうでしょうか．これはかなりややっこしくなりそうです．

そこで効果的なのが，ベン図(Ben-Euler 図式)といわれる図式です．



問題 1 をこれを使って描いてみると，右のようになって，太線内が 3 の倍数の集まり，細線内が 5 の倍数の集まり，そしてこれら両方が重なっている部分は，3 と 5 の公倍数の集まりを表しています．したがって，求めるのは‘斜線部にある数’の個数であることがわかるでしょう．

続いて，さきほどの問題(＊)について描いてみると，図の太線内は 2 の倍数で，その中の 3 つの図形が重なっている部分 a は，2，3，5 の公倍数を表しています．そして，$a+b$，$a+c$ の部分はそれぞれ 2 と 3，2 と 5 の公倍数であることから，結局求めるのは斜線部ということがわかります．



したがってこれは，

(2 の倍数)

　　－{(2 と 3 の公倍数)＋(2 と 5 の公倍数)

　　　　　－(2 と 3 と 5 の公倍数)}

と，計算すればよいことが，一目瞭然ですね．

どうですか，ベン図は皆さんが頭のなかで考えていることを，そのまま紙に映し出しているみたいでしょ．

このようにベン図を描くことは，ダイヤグラムなどと同様，直接問題を解くための手段ではありませんが，視覚的に表現されることで，問題が整理しやすくなる，という効果を持っています．これにより，問題 1 や問題(＊)では，“場合分け”が明確に正しく行なわれていることに注意しましょう．

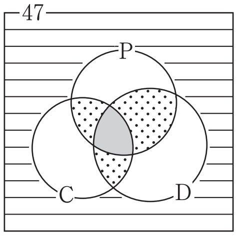
次に今度は，ベン図を描くことが文章題を解く手助けになる，というタイプの問題を紹介します．もちろんこれによって，その文章題が解決するわけではありませんが，ベン図により全体の見渡しができて，把握しやすくなる，つまり，“全容解明”に役立つ，というものです．

その代表例として，99 年の城北高校の問題をやってみましょう．

問題 2. 47 人の生徒について調査したところ，パソコンを持っているものが 41 人，CD プレーヤーを持っているものが 37 人，デジタルカメラを持っているものが 24 人いた．これらを 3 つとも持っているものは少なくとも何人か．

この手の問題を解くときに，まず整理しておかなければいけないことは，3 つすべてを持っている人，3 つのうちの 2 つを持っている人，1 つだけを持っている人，1 つも持っていない人の“4 通り”の人がいる，ということです．

そこで，右のようなベン図を描きます．



P はパソコン，C は CD プレイヤー，D はデジタルカメラをそれぞれ持っている人の集まりです．

そうすると，

- 3 つすべてを持っている人 …網目部分
- 2 つだけを持っている人 ……打点部分
- 1 つだけを持っている人 ……白い部分
- 1 つも持っていない人 ………横線部分

と，区別することができます．

また，‘少なくとも’とは‘最も少ないとき’ということです．

解法　まず，下の図 1，2 を比べて下さい．

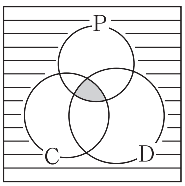


図 1

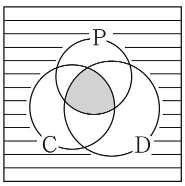


図 2

図 1，2 とも P，C，D の大きさはそれぞれ同じですが，3 つが重なっている部分(網目部分)の大きさが異なっていますね．そこで，何か気が付きましたか．そう，網目部分が小さいほど，横線部分も小さく，またその逆もいえるのです．

したがって，題意を満たすためには，なるべく横線部分を少なくすればよいのです．つまり，これらの機器を 1 つも持っていない人を‘0 人’としてしまえばよいのです．よって47人全員が，何かしら 1 つは持っている，と仮定しましょう．

続けて，図 3，4 をみてください．

図 3

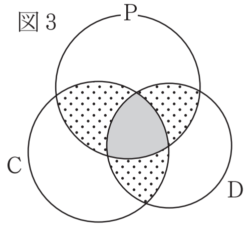
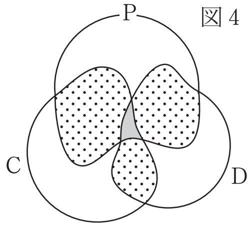


図 4



今度は，網目部分と白い部分が連動して増減しています．つまり，白い部分(1 つだけを持っている人)をなるべく少なくすることが，題意を満たすことになります．ですから，これも‘0 人’としてしまいましょう．

これでかなり整理されました．つまり，この問題は 47 人全員を，「3 つすべてを持っている人」と，「2 つを持っている人」の 2 通りに分類して，話を進めればよいことになります．

そこでこれらの機器を，一人がいくつ持っているのかに関わりなく，すべて集めてみましょう．41＋37＋24＝102．つまり，‘のべ102台’であるといえます．そしてこの102台を，まず47人全員(1 人目から 47 人目)に 2 台ずつ振り分けてみます．すると，102－47×2＝8 より，8 台余ることになりますね．よってこれら 8 台を，今度は 1 人目から 8 人目までに，再度振り分けることになりますから，結局，その **8 人**が「3 つとも持っている人」に該当することになります．

1 人目	2 人目	…	8 人目	9 人目	…	47 人目	
●●	●●	…	●●	●●	…	●●	←2 台目まで
●	●	…	●		…		←3 台目

そして事実，2 つを持っている人を，P と C が 23 人，P と D が 10 人，C と D が 6 人とすると，確かに条件が満たされています．

入試を勝ち抜く数学ワザ②

‘あまり’に強い悠久の中国

今回はまず，次の「余り」に着目した問題からやってみましょう．

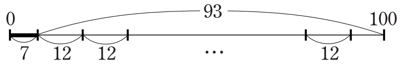
問題 1．1から100までの整数について，次の各問いに答えよ．
（1） 12で割って7余る数はいくつあるか．
（2） 3で割ると2余り，5で割ると1余る数は，全部でいくつあるか．

（1）は，小さい順に並べて，

7，19，31，43，55，67，79，91

としてもできますが…．

解法 （**1**） 数直線を書いてみましょう．



100から余りの7を引いて93，この中に12の固まりがいくつあるのかを考えます．

$(100-7)\div12=7$ 余り 9

こうして，この中に12が7個あることがわかり，商0の場合も加えて，$(7+1)=8$（**個**）とします．

$\boxed{（全体の集まり－余り）\div 割る数}$

つまりこうなのですね．

これをもっと数学っぽくしてみます．割る数を p，商を q，余りを r とすると，$pq+r$ と表せるので，

“12で割ると7余る数”は，“$12q+7$”

と置けます．

すると題意から，これが1から100までの整数なので，不等式を使ってこうします．

$1\leqq12q+7\leqq100$（q は0または自然数）

これを解いて　$-0.5\leqq q\leqq7.75$

となるので，満たす q は0，1，…，7なので，**8個**とわかります．

（**2**） まず書き出してみましょう．

3で割ると2余る数

→2，5，8，⑪，14，17，20，23，㉖，…

5で割ると1余る数

→1，6，⑪，16，21，㉖，…

ここから共通な数は，小さい順に

11，26，41，…

で，“15で割ると11余る数”と予測できます．

またまた数学的にしてみましょう．

$3a+2$，$5b+1$ と置きたいところですが，今回はまず，余りを同じに揃えることに腐心しましょう．例えば先ほどの式へ，$a=a'+3$，$b=b'+2$ を代入すると，

$3(a'+3)+2=3a'+11$

$5(b'+2)+1=5b'+11$

となりますから，これで余りが統一されました．

つまり，

「3で割ると2余る数」

→「3で割ると11余る数」……＊

「5で割ると1余る数」

→「5で割ると11余る数」……＊

こう言い換えることができるのです．

結局これら＊から，題意を満たす数は，

「3で割っても5で割っても11余る数」

→「15で割ると11余る数」

ですから，

“$15q+11$”

と置けます．あとは先ほどと同じですね．

$1\leqq15q+11\leqq100$（q は0または自然数）

から，

$-0.66\cdots\leqq q\leqq5.93\cdots$

で，これを満たす q は0，1，…，5です．よって，（2）の答えは**6個**です．

皆さん**『中国剰余定理』**というのを聞いたことがありますか？

実は（2）で，最小の解が“必ず存在すること”および，それ以降の解は“15の間隔で増えて

いくこと”が，この定理によって保証されているのですよ．だからこそ，自分たちは安心して答えを求めることが可能なのです．

悠久の中国を感じさせる大きさがあります．

続いては「中学への算数」で見つけた，中学受験の問題です．07 年の巣鴨中です．もちろん実際は算数で解くのですが，ここでは数学の知識をふんだんに使ってやってみます．

> **問題 2.** 100 から 1000 までの整数の中で，次の各問いに答えよ．
> （1） 5 で割ると 3 余り，7 で割ると 4 余る整数は何個あるか．
> （2） ある整数 x で割ると，余りが 19 となるものが 28 個ある．このとき，x の値を求めよ．

（1）はまず，先ほどと同じ考えで余りを揃えましょう．その余りですが，‘3 に 5 の倍数を順次加えていったもの’と‘4 に 7 の倍数を加えていったもの’，これらに共通する最小の数を探します．

解法 （**1**） 共通する最小の余りは 18 ですから，$5a+18$，$7b+18$ と置きます．これらから求める数は‘5 で割ると 18 余り，7 で割ると 18 余る数’なので，

“35 で割ると 18 余る数”

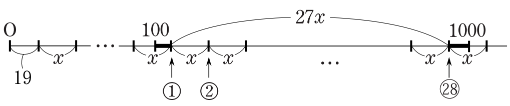
です．そこで，“$35q+18$”と置きます．これが 100 ～ 1000 の中にあるので，

$$100 \leqq 35q+18 \leqq 1000$$
$$2.3\cdots \leqq q \leqq 28.05\cdots$$

よって，これを満たす q は，3，4，…，28 ですから，$28-2=$**26（個）**が答えです．

（2）はかなりの難問です．これまでと全く別のアイディアでやってみます．

（**2**） 次の数直線を見てください．ここには 100～1000 の中に，x がギュッと詰まっている様子が描かれています．



そこで題意の 28 個に，一つずつ番号を与えていきます．100 を初めて過ぎるところを①，そして最後の 1000 の手前を㉘とします．この，番号①～㉘の間には，x がいくつあるかわかりますか？そう 27 個です．

そこで，$(1000-100)-27x=900-27x$ は，数直線の残った二つの太線部の和を表しています．

この部分は $27x$ が大きくなれば 0 に近づきますが，小さければどうなるでしょうか．左右どちらも x にまでなることはありませんから（x より大きいとすると，もうひとつ x が区切れてしまい，番号が増えてしまいます），太線部の片方は，最大でも x より 1 小さい数です．ですから 2 つの和は，最大で $2(x-1)$ です．

$$0 \leqq 900-27x \leqq 2(x-1)$$
$$31.1\cdots \leqq x \leqq 33.3\cdots$$

そしてこれを満たすのは，$x=32$，33 です．

ではここで，先ほどの定石を使って確かめてみましょう．

まず，$x=33$ のときです．“$33q+19$”と置きます．

$$100 \leqq 33q+19 \leqq 1000$$
$$2.4\cdots \leqq q \leqq 29.7\cdots$$

より，q は 3 ～ 29 の 27 個で，題意を満たしません．

一方，$\boldsymbol{x=32}$ は，“$32q+19$”と置きます．

$$100 \leqq 32q+19 \leqq 1000$$
$$2.5\cdots \leqq q \leqq 30.6\cdots$$

より，q は 3 ～ 30 の 28 個で，これが答えです．

➡**注** 商を q とし，$100 \leqq xq+19 \leqq 1000$ と置き，これを満たす自然数 q が 28 個ある．と立式することもできます．

ミニコラム・I

西暦の素因数分解

2017＝素数，$2018=2\times 1009$，

$2019=3\times 673$，$2020=2^2\times 5\times 101$，

$2021=43\times 47$

数

入試を勝ち抜く数学ワザ③

そのヒントはgに聞こう

皆さん，普段から“最大公約数”を有効に活用できていますか？　今回は「ちょっとその自信がない…」という人にぜひ読んでもらいたい記事です．

2数の最大公約数(Greatest Common Measure)をgとします．するとつまり，この2数はgの倍数ですから，次のように表せます．

ag，bg（a，bは互いに素な自然数)…＊

➡注　互いに素…aとbの公約数が1のみ．

例えば12と18ならば最大公約数は6なので，

6×2，6×3

となることからも＊のように分解できるのは明らかです．ここでaとbに該当する数は2と3ですから，確かに互いに素になっています．

➡注　3×4，3×6のような分け方では，$a=4$，$b=6$，$g=3$で，gが最大公約数でなくなってしまい題意に反します．それだけa，bが‘互いに素’という条件は重要なのです．

数を分解し表す方法に素因数分解型がありますが，今回はそれを使わずに，＊式のように**“最大公約数gとに分ける”**秘策を紹介することにしましょう．

ではさっそく問題です．

問題 1．下の(1)～(4)において，条件を成り立たせるような2数を求めよ．
(1)　最大公約数が7，最小公倍数105
(2)　最大公約数が5，積700
(3)　最大公約数が13，和117
(4)　最大公約数が7，平方の和2009

最大公約数がずらっと並んでいます．求める2数をA，Bと置き($A<B$)，これらを＊に則り分解します．

解法　(1)　＊に沿って，$A=7a$，$B=7b$（$a<b$，aとbは互いに素な自然数)と置きます．この最小公倍数は$7ab$と表せるので，

$7ab=105$　　$ab=15$

するとこれに該当するa，bの組は，

$(a,\ b)=(1,\ 15)$，$(3,\ 5)$

となって，したがって，

$(A,\ B)=(\mathbf{7},\ \mathbf{105})$，$(\mathbf{21},\ \mathbf{35})$

で，このどちらも成り立ちます．

(2)　次も同様に，$A=5a$，$B=5b$（$a<b$，aとbは互いに素な自然数)と置きます．

$5a\times5b=700$　　$ab=28$

これに該当する互いに素なa，bの組は，

$(a,\ b)=(1,\ 28)$，$(4,\ 7)$

となって，したがって，

$(A,\ B)=(\mathbf{5},\ \mathbf{140})$，$(\mathbf{20},\ \mathbf{35})$

で，このどちらも成り立ちます．

(3)　$A=13a$，$B=13b$と置いて，

$13a+13b=117$　　$a+b=9$

これに該当する互いに素なa，bの組は，

$(a,\ b)=(1,\ 8)$，$(2,\ 7)$，$(4,\ 5)$

となって，したがって，

$(A,\ B)=(\mathbf{13},\ \mathbf{104})$，$(\mathbf{26},\ \mathbf{91})$，$(\mathbf{52},\ \mathbf{65})$

で，このいずれもが成り立ちます．

(4)　$A=7a$，$B=7b$と置いて，

$7^2a^2+7^2b^2=7^2\times41$　　$a^2+b^2=41$

これに該当する互いに素なa，bの組は，

$(a,\ b)=(4,\ 5)$となって，したがって，

$(A,\ B)=(\mathbf{28},\ \mathbf{35})$が答えです．

ここで，最小公倍数(Least Common Multiple)も話に加えて膨らませます．これをlとすると$l=abg$と表せますから，次のような面白い性質を導くことができます．

$$ag\times bg=g\times l$$

書き換えるとこう言えます．

「2数の積＝最大公約数×最小公倍数」

このことを利用すると，(1)は

$7a\times7b=7\times105$ とできて，同様に解き進めることも可能です．つまり，(1)の別解となるわけです．

次のような最大公約数が明らかではないタイプでも，同じ考えをとることができます．

> **問題** **2.** 和が 56，最小公倍数 105 である 2 数 A，B を求めよ．

＊を基にして ag，bg（$a<b$，a と b は互いに素な自然数）と置くことから，2 数の糸口が見つかります．さあ始めましょう．

解法　**和**… $ag+bg=(a+b)g=56=2^3\times7$ …①

最小公倍数… $abg=105=3\times5\times7$ ………②

①より考えられる g としては，

$g=1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 14,\ 28,\ 56$

また②では，

$g=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 15,\ 21,\ 35,\ 105$

なので，これら①②に共通するのは，$g=1$，7 の 2 種です．

・$g=1$ のとき，$a+b=56$，$ab=105$

②を参考にすると，これを満たす 2 数は存在しません．

・$g=7$ のとき，$a+b=8$，$ab=15$

この場合，$a=3$，$b=5$ がそれを満たします．

よって，**(21，35)**が答えです．

➡**注**　$b=8-a$ とし積 ab へ代入して二次方程式を作るか，$ab=15$ から 2 つの自然数 a，b を推量し，答えを導きます．

あるいは「★ a と b が互いに素」ならば「$a+b$ と ab も互いに素」であることを利用できます．

（理由）　もし，$a+b$ と ab が r の倍数だったとします．

$a+b=rM$ …… i ），$ab=rN$ …………… ii ）

と置けば(ii)において★より，r が a と b の両方に含まれることはなく，仮に a が持つとします．その上で i)を，$b=rM-a$ と変形すれば，右辺は r の倍数だから，左辺もそうなり★と矛盾してしまいます．つまり，〰〰部が誤っていたわけです．

最後に，91 年の開成の問題(一部略)にチャレンジしてみましょう．これまでの総決算として，やってみてください．

> **問題** **3.** 2 つの自然数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とすると，
>
> $a^2+b^2+g^2+l^2=1300$
>
> が成立する．ただし，$a>b$ とする．
>
> $g>1$ のとき，a，b を求めよ．

解法　＊にしたがい，$a=gA$，$b=gB$，$l=gAB$ と置き準備します（A，B は互いに素）．

$$
\begin{aligned}
\text{与式}&=a^2+b^2+g^2+l^2\\
&=g^2A^2+g^2B^2+g^2+g^2A^2B^2\\
&=g^2(A^2B^2+A^2+B^2+1)\\
&=g^2(A^2+1)(B^2+1)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots☆\\
&=2^2\times5^2\times13
\end{aligned}
$$

と変形して待ちます．

こうすることで，☆より g の値が絞られます．考えられるのは，$g=2$，5，10 です．では場合分けしてやってみましょう．

① $g=2$ のとき，

$(A^2+1)(B^2+1)=5^2\times13$

5×13	5	$A=8$，$B=2$（互いに素×）
5×5	13	$A=\times$，$B=\times$

よって，これを満たす a，b は存在しません．

② $g=5$ のとき，

$(A^2+1)(B^2+1)=2^2\times13$

2×13	2	$A=5$，$B=1$ ◎
13	2×2	$A=\times$，$B=\times$

よって，$A=5$，$B=1$ が満たし，

(a，b)=(25，5)が成り立ちます．

③ $g=10$ のとき，

$(A^2+1)(B^2+1)=13$

13	1	$A=\times$，$B=\times$

よって，これを満たす a，b は存在しません．

ミニコラム・Ⅱ

自然数 N の素因数分解が可能かどうかを知りたいならば，$\sqrt{N}$ 以下の素数で割れるかどうかを試せばよい．

例：167　　$\sqrt{167}<13$．よって 11 以下の素数 2，3，5，7，11 で試す．