

はじめに

学習指導要領改訂に伴い、新課程に対応するため[第2版]としました。「期待値」を充実させ、他の分野についても一部加筆し、さらに細かい修正を数多く行いました。ベクトルが数Cに移ったことから、タイトルも「真・解法への道！[第2版]数学I A II B C (ベクトル)」と変わりました。もちろん、コンセプトは以前と変わらず、「**難関大を目指す普通の受験生向けの参考書決定版**」です。「難関大を目指すのならこの本をやっておけば大丈夫」と言われることを目指しています。また、受験生だけでなく、難関大志望者を指導される学校の先生や塾・予備校の講師の方も対象にしています。

主な特長を挙げておきます。

① 受験数学で重要なテーマ、良問を厳選

数学I A II B C (ベクトル) の範囲から、入試で頻出のテーマを網羅しています。[例題]も数多くの入試問題、有名問題から厳選しており、質が高いです。

② 試験本番で使える解法やテクニックを優先

その問題でしか使えないようなマニアックな解法は極力避け、他の問題にも広く使える汎用性のある解法や、地味だけでも点数が取りやすい堅実な解法を優先しました。また、検定教科書の内容、範囲、有名だけれども非効率な手法(いわゆる「負の遺産」)に縛られることなく、入試で役立つ数学の道具や重要テクニックを数多くカバーしました。短期間で効率よくさまざまな解法を身に付けるには、まさにうってつけの参考書です。

③ かつてない丁寧な解説、綺麗で正確な図を掲載

解説は非常に詳しいです。特に[例題]の□Point...□では、着眼点や解法に至るプロセス、背景にある考え方などを極力フォローしました。1つのテーマからなるべく多くのテーマに関連付けるため、「意味のある脱線」が多いです。受験生目線を重視しており、私自身の経験をよく紹介しています。「エッセイ風参考書」とでも呼べそうです。

図もふんだんに活用しています。すべての図は私自身がパソコンで作成し、美しさ、正確さにこだわっています。過去に作成していた図もすべて描き直し、第2版でも手を加えました。原稿自体は \TeX という組版ソフトを使い、デザインも含めすべて私1人で執筆しました。私が考える参考書執筆の理想形です。

私のような凡人が数学の力を伸ばすためには、コツコツ努力を積み重ねるしかありません。しかし、本書にはその努力がなるべく苦痛にならないような工夫が

散りばめられています。本書を通じて、数学が理解できる楽しさや面白さ、そして難関大合格の喜びを味わっていただければ幸いです。

【本書の利用法】

本書は、問題編と解説編に分かれており、メインの解説編は、重要テーマの解説、例題、ポイントチェックの3つの部分から構成されています。

① 重要テーマの解説で知識を身に付けよう

入試で使える重要テーマの解説です。じっくり読んでその内容を理解しましょう。教科書に載っていないことも多く含まれますから、初めて触れる知識も多いはずです。「ふ〜ん」と流すのではなく、大いに感動しましょう。印象に残ったものはなかなか忘れないものです。よく「これは入試で使っているのですか？」という質問を受けますが、正しければ入試で使っていない知識などありません。

② 例題とポイントチェックで実戦的な力を養成しよう

重要テーマの解説で扱った知識が有効な例題です。まずは自分で実際に手を動かして解いてみましょう。その後、**▶解答◀**と **□Point...□**を確認してください。**▶解答◀**は答案作成の模範になるようになりかなり気を遣って作成しました。また、随所に番号（解答とリンクしているものは**5**などとし、そうでないものは**5**などとし）を付け、解答に表れない重要な補足を **□Point...□**で詳しく解説しています。「なぜこう解くのか」が納得できるまで熟読してください。

一般に、参考書というものはすべて完璧に理解する必要はありません。まずは軽い気持ちで興味がある部分から読み始めましょう。「すべて読まないといけない」ではなく、「読んだ分だけ力がつく」とポジティブにとらえることです。

【謝辞】

さまざまな経験をさせていただいた予備校関係者の方々や教え子たちに感謝します。現場での講師経験がなければとても書ける内容ではありませんでした。知的な刺激を与えてくださった同僚講師の方々にも感謝します。また、予備校講師の仕事を理解し支えてくれている家族に感謝します。

今回の原稿を作成するにあたり、emath という TeX のマクロを一部使わせていただいております。作成者の大熊一弘氏に感謝します。また、東京出版の飯島康之氏と坪田三千雄氏には、大変鋭い指摘や貴重なご意見を数多くいただきました。ありがとうございます。最後に、私の原稿はすべて安田亭先生のご指導あつてのものです。この場を借りてお礼申し上げます。

目次

第1章	論理	(問題編は 8)	37
第1節	必要条件・十分条件の意味.....		38
第2節	同値変形の利用.....		45
第3節	必要から十分へ.....		57
第2章	整数	(問題編は 9)	69
第1節	整数問題の解法.....		70
第2節	素因数の個数.....		77
第3節	平方数の性質.....		86
第4節	互いに素.....		91
第5節	互除法.....		100
第6節	不定方程式.....		104
第7節	合同式.....		110
第8節	実験する.....		116
第3章	論証	(問題編は 11)	121
第1節	背理法.....		122
第2節	対称性を保つか崩すか.....		129
第3節	部屋割り論法と奇跡の合コン.....		133
第4節	論証問題攻略法.....		144
第4章	方程式	(問題編は 13)	151
第1節	2次方程式の解の配置.....		152
第2節	解と係数の関係.....		163
第3節	変数の置き換えと解の個数.....		172
第4節	共通解.....		177
第5節	n 次方程式の有理数解.....		181
第5章	不等式	(問題編は 15)	187
第1節	不等式の証明法.....		188
第2節	相加相乗平均の不等式.....		199
第3節	出木杉のび太論法.....		211

第4節	不等式と領域.....	223
第5節	評価する.....	233
第6章	関数 (問題編は 18)	241
第1節	相方の存在条件.....	242
第2節	単位円の利用.....	249
第3節	三角関数の公式.....	252
第4節	真・予選決勝法.....	260
第5節	2変数関数.....	264
第7章	座標 (問題編は 19)	267
第1節	座標平面での角.....	268
第2節	軌跡.....	273
第3節	通過領域.....	286
第8章	ベクトル (問題編は 20)	299
第1節	点が直線上または平面上にある条件.....	300
第2節	ベクトルの式を読む.....	311
第3節	単位ベクトル, 法線ベクトルの利用.....	316
第4節	内積の図形的意味.....	326
第5節	正射影ベクトル.....	331
第9章	空間図形 (問題編は 22)	339
第1節	平面で考える.....	340
第2節	等面四面体.....	346
第3節	平面の方程式.....	359
第4節	正射影の面積.....	372
第10章	図形総合 (問題編は 24)	383
第1節	座標を設定する.....	384
第2節	図形問題の解法.....	392
第3節	図形と論証.....	406
第11章	数列 (問題編は 25)	415
第1節	等差数列・等比数列.....	416
第2節	群数列必勝法.....	422

第3節	格子点の個数.....	426
第4節	数列の最大・最小.....	432
第5節	漸化式.....	437
第12章	数学的帰納法 (問題編は 27)	447
第1節	数学的帰納法の仕組み.....	448
第2節	仮定が使いにくい数学的帰納法.....	455
第3節	背理法との融合.....	469
第13章	場合の数 (問題編は 28)	475
第1節	確率攻略法.....	476
第2節	格子点の利用.....	482
第3節	重複組合せ.....	488
第14章	確率 (問題編は 29)	497
第1節	全事象のとり方.....	498
第2節	事象をまとめる.....	509
第3節	座標平面での樹形図.....	514
第4節	ベン図の利用.....	519
第5節	確率漸化式.....	525
第6節	独立・従属.....	538
第7節	条件付き確率.....	545
第8節	変魔大王への道.....	552
第15章	微積分 (問題編は 34)	567
第1節	3次関数のグラフの性質.....	568
第2節	接線の本数.....	573
第3節	定積分で表された関数.....	579
第4節	絶対値を含む関数の定積分.....	585
第5節	有用な微積分の公式.....	590
第6節	面積の計算.....	596
出典・テーマ 一覧		604

例題 2-1. 自然数 n に対して、 n のすべての正の約数 (1 と n を含む) の和を $S(n)$ とおく。例えば、 $S(9) = 1 + 3 + 9 = 13$ である。このとき以下の各問いに答えよ。

- (1) n が異なる素数 p と q によって $n = p^2q$ と表されるとき、 $S(n) = 2n$ を満たす n をすべて求めよ。
- (2) a を自然数とする。 $n = 2^a - 1$ が $S(n) = n + 1$ を満たすとき、 a は素数であることを示せ。
- (3) a を 2 以上の自然数とする。 $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ が $S(n) \leq 2n$ を満たすとき、 n の 1 の位は 6 か 8 であることを示せ。 (東京医科歯科大)

▶▶▶▶ 解説は 72 ページ

例題 2-2. 自然数 a, b, c が

$$3a = b^3, 5a = c^2$$

を満たし、 d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d = 1$ に限るとする。

- (1) a は 3 と 5 で割り切れることを示せ。
- (2) a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ。
- (3) a を求めよ。 (東京工業大)

▶▶▶▶ 解説は 80 ページ

例題 2-3. m を 2015 以下の正の整数とする。 ${}_{2015}C_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。 (東京大)

▶▶▶▶ 解説は 83 ページ

例題 2-4. 以下の問いに答えよ。

- (1) $3^n = k^3 + 1$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。
- (2) $3^n = k^2 - 40$ をみたす正の整数の組 (k, n) をすべて求めよ。 (千葉大)

▶▶▶▶ 解説は 87 ページ

例題 2-5. p が素数であれば、どんな自然数 n についても $n^p - n$ は p で割り切れる。このことを、 n についての数学的帰納法で証明せよ。

(京都大)

▶▶▶▶ 解説は 93 ページ

論理

整数

論証

方程式

不等式

関数

座標

ベクトル

空間図形

図形総合

数列

数学的帰納法

場合の数

確率

微積分

出典・テーマ

一般に、整数問題は解法の糸口が見つけにくく、苦手な受験生が多い分野です。苦手意識を克服するためにまずできることは、よく使う解法のパターンを押しこめることでしょう。

整数問題の解法で有名なものは、次の3つです。

1つ目は「**範囲を絞る**」です。実数とは異なり、整数はとびとびの値しかとれませんから、もし範囲を絞ることができれば、その候補は有限個となります。あとは、それぞれの値が題意を満たすかどうか調べるだけです。**大雑把に絞って、その後厳密に評価する**イメージです。

例えば、整数 x に対し、何かうまい方法を使って $0 < x < 4$ と範囲が絞れたとしましょう。 x の候補は $x = 1, 2, 3$ に限られます。もちろん、この時点では「可能性があるのは $x = 1, 2, 3$ のみ」と言っているだけです。これらが答えという保証はありません。そこで、本当に $x = 1, 2, 3$ が正しいのかを個別に調べ、正しいもののみを答えとします。

2つ目は「**余りで分ける**」です。与えられた整数をある正の整数で割った余りで分類します。証明問題でよく用いられる手法です。

最も簡単な例は、「偶奇で場合分け」です。どんな整数も2で割った余りは0か1、すなわち偶数か奇数ですから、偶数の場合と奇数の場合を調べれば、すべての整数に対して調べたことになります。また、受験数学でよく登場するのは、3で割った余りに着目する問題です。どんな整数も3で割った余りは0, 1, 2のいずれかです。そこで、整数 n を含む3で割った余りに関連する問題は、 n のままではなく、 $n = 3k, 3k + 1, 3k + 2$ (k は整数) と3つの場合に分けると考えやすいです。**より具体的な表現を用いることで式変形や証明が進む**からです。いくつで割った余りに着目するかは問題によります。

3つ目は「**因数分解する**」です。整数問題ではない普通の方程式

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

であっても

$$(x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 1, 3$$

のように因数分解して解きますから、整数問題ならではの解法と言えない印象がありますが、整数問題で使う因数分解は、これとは少し異なります。

例えば、自然数 x, y ($x \leq y$) に対して

$$xy - 2x - 2y = 0$$

という式があるとします。これは

$$(x-2)(y-2) = 4$$

と変形できます。右辺が0である必要はありません。私はこのような変形を「強引に因数分解する」と呼んでいます。積の形を作ることが目的ですから、余りが出てよいのです。あとは、 $-1 \leq x-2 \leq y-2$ に注意して積が4になる2つの整数の組を考え

$$(x-2, y-2) = (1, 4), (2, 2) \quad \therefore (x, y) = (3, 6), (4, 4)$$

と解が求まります。

なお、よくある誤解ですが、右辺は必ずしも「数字」である必要はありません。 p が素数であれば

$$(x-2)(y-2) = p^2$$

のように、「文字定数」でもよいです。 p^2 の分け方がすべて把握できて

$$(x-2, y-2) = (1, p^2), (p, p)$$

$$(x, y) = (3, p^2+2), (p+2, p+2)$$

と解けるからです。一方、 p が素数でなければ解けません。よく間違える人がいますが、 p が素数でなければ、 $p^2 = 1 \cdot p^2 = p \cdot p$ 以外にも p^2 を分ける方法があります。 p 自体がさらに細かく分けられるからです。この方法ではすべての解を求めることができません。右辺については、数字かどうかではなく、**素因数分解できるかどうか**が重要なのです。

整数問題では、まずどの解法が使えるかを考えましょう。ちなみに、私は3つの解法の頭文字を取って、「は・あ・い」と覚えています 😊

〈整数のまとめ1〉

Check ▶▶▶▶ 整数問題の解法

- (i) 範囲を絞る (大雑把に絞った後、厳密に評価する)
- (ii) 余りで分ける (議論しやすいより具体的な形にする)
- (iii) 因数分解する (右辺は素因数分解できる形にする)

問題編

論理

整数

論証

方程式

不等式

関数

座標

ベクトル

空間図形

図形総合

数列

数学的帰納法

場合の数

確率

微積分

出典・テーマ

〈正の約数の和, 完全数〉

例題 2-1. 自然数 n に対して, n のすべての正の約数 (1 と n を含む) の和を $S(n)$ とおく. 例えば, $S(9) = 1 + 3 + 9 = 13$ である. このとき以下の各問いに答えよ.

- (1) n が異なる素数 p と q によって $n = p^2q$ と表されるとき, $S(n) = 2n$ を満たす n をすべて求めよ.
- (2) a を自然数とする. $n = 2^a - 1$ が $S(n) = n + 1$ を満たすとき, a は素数であることを示せ.
- (3) a を2以上の自然数とする. $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ が $S(n) \leq 2n$ を満たすとき, n の1の位は6か8であることを示せ. (東京医科歯科大)

考え方 (1)は, 「因数分解する」, 「範囲を絞る」のどちらでも解けます. なお, $S(n) = 2n$ を満たす n を**完全数**といいます. (2)の素数であることの証明は, 背理法が有効です. (3)は, まずは n が素因数分解できる「 $2^a - 1$ が素数のとき」に着目するとよいでしょう.

▶解答◀ (1) $S(n) = 2n$ とすると

$$(1 + p + p^2)(1 + q) = 2p^2q \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(▶▶▶▶ 1)

$1 + p + p^2$ と p は互いに素であるから, (▶▶▶▶ 2) 右辺の p^2 は $1 + p + p^2$ が (約数として) もつ. また, $1 + p + p^2$ と q は互いに素であるから, 右辺の q は $1 + p + p^2$ がもつ. さらに, $1 + p + p^2 = 1 + p(p + 1)$ は奇数であるから, 右辺の2は $1 + q$ がもつ. よって

$$1 + p + p^2 = q \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$1 + q = 2p^2 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

②を③に代入し

$$2 + p + p^2 = 2p^2$$

$$p^2 - p - 2 = 0 \quad \therefore (p + 1)(p - 2) = 0$$

p は素数であるから $p = 2$ で, ②より, $q = 7$ である. この q は素数で適する.

ゆえに, $n = 2^2 \cdot 7 = 28$ である.

◀ 右辺の $2p^2q$ は素因数分解した形です. どう分配するかを考えます.

◀ $p(p+1)$ は連続する2つの整数の積ですから, 偶数です.

◀ q を消去します.

◀ ②から得られる q が素数かどうかは自明ではありません.

別解 ①を次数の低い q について整理すると

$$(p^2 - p - 1)q = p^2 + p + 1$$

p は素数であるから、 $p \geq 2$ で

$$p^2 - p - 1 = p(p - 1) - 1 \geq 2(2 - 1) - 1 = 1 > 0$$

より

$$q = \frac{p^2 + p + 1}{p^2 - p - 1} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

(▶▶▶▶ ③)

$$q = 1 + \frac{2p + 2}{p^2 - p - 1}$$

q は整数であるから、 $\frac{2p + 2}{p^2 - p - 1}$ も整数で、また、

$$\frac{2p + 2}{p^2 - p - 1} > 0 \text{ より}$$

$$\frac{2p + 2}{p^2 - p - 1} \geq 1$$

$$2p + 2 \geq p^2 - p - 1$$

$$p^2 - 3p - 3 \leq 0$$

$$\frac{3 - \sqrt{21}}{2} \leq p \leq \frac{3 + \sqrt{21}}{2} (= 3 \dots)$$

p は素数であるから、 $p = 2, 3$ である。

$p = 2$ のとき、④より $q = 7$ で、これは素数で適する。

$p = 3$ のとき、④より $q = \frac{13}{5}$ で、これは不適。

以上より、 $(p, q) = (2, 7)$ で、 $n = 28$ である。

(2) $a = 1$ のとき、 $n = 1$ で、 $S(1) = 1 \neq 1 + 1$ より、不適。よって、 $a \geq 2$ であり、 $n \geq 3$ であるから、 n は1と n を正の約数にもつ。(▶▶▶▶ ④)

n が素数でないと仮定すると、 n は1と n 以外の正の約数をもつから、 $S(n) > n + 1$ となり矛盾。よって、 n は素数である。

a が素数でないと仮定すると、 $a \geq 2$ より、 a は合成

◀ q の係数が0でないことの確認です。平方完成する手もありますが、 $p \geq 2$ 、 $p - 1 \geq 1$ を使う方がシンプルです。

◀ 「見た目は分数だが実は整数」という形です。

◀ 正の整数は1以上です。次数の低い分子が次数の高い分母以上ということで、範囲が絞れます。

◀ $4 < \sqrt{21} < 5$ より
 $\frac{7}{2} < \frac{3 + \sqrt{21}}{2} < 4$ です。

◀ 1は素数でも合成数でもありませんから、別に考えます。

◀ 背理法その1です。

◀ 背理法その2です。

問題編
論理
整数
論証
方程式
不等式
関数
座標
ベクトル
空間図形
図形総合
数列
数学的帰納法
場合の数
確率
微積分
出典・テーマ

数であり

$$a = kl \quad (k, l \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数})$$

と書ける。(▶▶▶▶ 5)

$$n = 2^a - 1 = 2^{kl} - 1 = (2^k)^l - 1$$

$t = 2^k$ とおくと, $t \geq 2^2 = 4$ で

$$n = t^l - 1$$

$$= (t-1)(t^{l-1} + t^{l-2} + \dots + t + 1)$$

$t-1 \geq 3$, $t^{l-1} + t^{l-2} + \dots + t + 1 \geq t + 1 \geq 5$ より,

(▶▶▶▶ 6) n は素数でなく矛盾.

以上より, a は素数である.

(3) $a \geq 2$ より $2^a - 1 \geq 3$ であるから, $2^a - 1$ が素数のとき

$$\begin{aligned} S(n) &= (1 + 2 + \dots + 2^{a-1})\{1 + (2^a - 1)\} \\ &= \frac{2^a - 1}{2 - 1} \cdot 2^a = 2^a(2^a - 1) = 2n \end{aligned}$$

であることに注意する.

$2^a - 1$ が素数でないと仮定すると, $2^a - 1$ は奇数であるから, ある奇数の素因数 p ($3 \leq p < 2^a - 1$) をもつ. このとき

$$\begin{aligned} S(n) &\geq (1 + 2 + \dots + 2^{a-1})\{1 + p + (2^a - 1)\} \\ &> (1 + 2 + \dots + 2^{a-1})\{1 + (2^a - 1)\} \\ &= 2n \end{aligned}$$

となり矛盾.

よって, $2^a - 1$ は素数であり, (2)と同様にして, a は素数である.

$a = 2$ のとき, $n = 2^1(2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6$ であり, n の1の位は6である.

$a \geq 3$ のとき, a は奇数である. 2^{a-1} と $2^a - 1$ の1の位を調べる. 2^k ($k = 1, 2, \dots$) の1の位が2, 4, 8, 6を繰り返すことに注意する。(▶▶▶▶ 8)

◀ 置き換えるとスッキリします. 数学が得意な人は置き換えがうまいです.

◀ 因数分解の公式 (P.43) を用います.

◀ $2^a - 1$ をかたまりとみなします. $2^a - 1$ が素数なら, $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ は素因数分解した形です.

◀ n は完全数です. ちなみに(1)の答えは $a = 3$ の場合になっています.

◀ $2^a - 1$ が素数の場合の $S(n)$ と同じ形です.

(ア) $a = 4m - 1$ ($m = 1, 2, \dots$) のとき
 2^{a-1} の 1 の位は 4 であり, $2^a - 1$ の 1 の位は 7 である
 から, n の 1 の位は 8 である.

(イ) $a = 4m + 1$ ($m = 1, 2, \dots$) のとき
 2^{a-1} の 1 の位は 6 であり, $2^a - 1$ の 1 の位は 1 である
 から, n の 1 の位は 6 である.

以上より, 題意は示された.

◀ $a - 1$, a を 4 で割った余りはそれぞれ 2, 3 ですから, 2^{a-1} , 2^a の 1 の位は 2, 4, 8, 6 の太字部分である 4 と 8 です.

◀ $a - 1$, a を 4 で割った余りはそれぞれ 0, 1 ですから, 2^{a-1} , 2^a の 1 の位は 2, 4, 8, 6 の太字部分である 6 と 2 です.

□	Point	The integer NEO ROAD TO SOLUTION	2-1	Check!	□
---	--------------	-------------------------------------	------------	---------------	---

1 $n = p^2q$ の正の約数は

$$p^k q^l \quad (k = 0, 1, 2, l = 0, 1)$$

の形で書けますから, その和は $l = 0$ と $l = 1$ の項に分けて考えて

$$\begin{aligned} (1 + p + p^2) + (q + pq + p^2q) &= (1 + p + p^2) + (1 + p + p^2)q \\ &= (1 + p + p^2)(1 + q) \end{aligned}$$

となります. 実戦的には, 各素因数のべき乗の和の積をとります. 展開項にすべての正の約数が現れることが確認できます.

2 $1 + p + p^2 = p(p + 1) + 1$ は素数 p で割ると 1 余り, p の倍数ではありませんから, $1 + p + p^2$ と p は共通の素因数をもたず, 互いに素です. なお, 互いに素については, **第4節** (P.91) で詳しく扱います.

3 右辺は分子の次数が分母の次数以上で, 頭でっちな分数, いわゆる“仮分数”です. 整数問題では, 小学校の算数と同様に“**帯分数**”に直すのが鉄則です. $\frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5}$ のように, 分子を分母で割って変形します.

4 $S(n) = n + 1$ の意味は, n の正の約数の和が自明な正の約数 1 と n の和ということです. n はそれら以外に正の約数をもてないのですから, 素数です. 自明な正の約数をあらかじめ書いておくとよいでしょう.

5 合成数とは, 1 と素数以外の自然数で, 2 つの 2 以上の整数の積で表される自然数です. ここでの k, l は素数とは限りません. また, $k = l$ も含みます.

6 $l \geq 2$ に注意して最後の 2 項のみを取り出し

$$t^{l-1} + t^{l-2} + \dots + t + 1 \geq t + 1$$

とします. なお, $l = 2$ のときに等号が成り立ちますから, **等号がつかます**.

問題編

論理

整数

論証

方程式

不等式

関数

座標

ベクトル

空間図形

図形総合

数列

数学的帰納法

場合の数

確率

微積分

出典・テーマ

7 $S(n) > 2n$ が言えれば矛盾しますから、 $S(n)$ が $2^a - 1$ が素数のときの値 $(1 + 2 + \dots + 2^{a-1})\{1 + (2^a - 1)\}$ より大きいことを示せばよく、 n がこの展開項に含まれない余計な正の約数をもつことを示します。手取り早いのは $2^a - 1$ がもつ素因数を具体的に1つとることです。ただし、不等式になることに注意しましょう。 $2^a - 1$ は p 以外の素因数をもつ、または p を複数もつ可能性もあり、その際には、 n は $(1 + 2 + \dots + 2^{a-1})\{1 + p + (2^a - 1)\}$ の展開項に含まれない正の約数をもちますから、 $S(n)$ はこれよりも大きくなります。 $2^a - 1$ の素因数分解が分からない限り、 $S(n)$ の具体的な形は分かりません。

なお、(2)の a と同様に、 $2^a - 1 = kl$ (k, l は2以上の自然数) とおいて

$$S(n) \geq (1 + 2 + \dots + 2^{a-1})(1 + k)(1 + l)$$

とした解答を見たことがあります。詰りが甘いので、 $k = l$ のときが考慮されていないからです。 $k = l$ のときは

$$S(n) \geq (1 + 2 + \dots + 2^{a-1})(1 + k + k^2)$$

とします。代わりに $k \neq l$ を示してもよいです。 $k = l$ とすると、 $2^a - 1 = k^2$ です。 $a \geq 2$ より、 $2^a - 1$ を4で割った余りは3です。一方、**第3節** (P.86) で扱う「平方数の性質」を用いれば、 k^2 を4で割った余りは0か1です。よって、 $2^a - 1 = k^2$ の両辺を4で割った余りが異なり、矛盾します。

8 Point... **1-1. の 4** (P.44) と同様にして、 2^k の1の位を調べます。4

つごとに同じ数字が現れますから、**周期は4**です。右の下の表のように、 k を4で割った余りによって 2^k の1の位が決まります。よって、 a を4で割った余りで場合分けします。

k		1	2	3	4	5	...
2^k の1の位		2	4	8	6	2	...

k を4で割った余り		1	2	3	0
2^k の1の位		2	4	8	6

9 $2^a - 1$ (a は自然数) の形の自然数をメルセンヌ数といい、特に素数であるものをメルセンヌ素数といいます。「 $2^a - 1$ が素数 $\implies a$ が素数」であり、逆は正しくありません。反例は $a = 11$ で、 $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ です。これを踏まえて(3)での議論の流れの確認です。 $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ のとき

$$S(n) \leq 2n \implies 2^a - 1 \text{ が素数 (これは厳密には同値です)}$$

$$\implies a \text{ が素数} \implies n \text{ の1の位は6か8}$$

と一方通行ですが、矢印の向きが正しいため全く問題ありません。

▶あ と が き◀

高校3年のときに偶然、月刊「大学への数学」に出会い、6月号と7月号のみ購入して挫折した、あの「東京出版」から「真・解法への道! 数学ⅠAⅡB」を出版できたのは、2020年3月のことでした。ありがたいことに、非常に多くの人に手に取っていただき、何度も増刷を重ねて現在に至っています。改めて「東京出版ブランド」の偉大さを実感しています。また、「先輩に勧められた」、「SNSで見た」などの話を聞くことがあり、私の知らないところで本書を広めてくださっている方もいらっしゃるようです。感謝に堪えません。ありがとうございます。出版当時の2020年3月と言えば、例の新型感染症が猛威を振るい始めた時期です。実はその頃から第2版を出すことを想定していました。自宅待機を余儀なくされ、思わぬ形でまとまった時間が取れるようになったため、原稿作成に使っているTeXのマクロ(プログラムのようなもの)を作り直したのです。節や例題の追加、削除、順番の入れ換えなどを容易にする修正です。これが第2版やⅢC版の作成で活きました。転んでもただでは起きないことが重要です。

第2版では、「期待値」の充実、「互除法」の節、例題追加、「不等式と領域」の例題追加、「背理法」の節の加筆が大きな修正点ですが、他にも誰も気が付かないような、自己満足レベルの細かい修正も数多く行っています。今思えば、自分で選んで使い込んだ参考書は、持っていることで少しうれしい気持ちになる本でした。本書もそのような本に近づけていけば幸いです。

難関大学受験対策 **真・解法への道!** [第2版] **数学ⅠAⅡBC(ベクトル)**

令和2年3月27日 初版第1刷発行

令和6年8月26日 第2版第1刷発行

著者 箕輪 浩嗣

発行者 黒木憲太郎

発行所 株式会社 東京出版

〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7

電話：03-3407-3387 振替：00160-7-5286

<https://www.tokyo-s.jp/>

印刷所 株式会社 光陽メディア

製本所 株式会社 技秀堂

落丁・乱丁本がございましたら、送料弊社負担にてお取り替えいたします。