はじめに

本書は拙書「真・解法への道！ 数学ⅠAⅡBC（ベクトル）（第２版よりⅠAⅡBから変更，以下，真・解法ⅠAⅡBC）」のⅢC版です．「真・解法ⅠAⅡB」を出版した2020年から構想はあり，また，ありがたいことに読者の方からもご要望をいただいておりましたが，今回はすべて一から書き下ろしたため，想像以上に時間がかかってしまいました．

コンセプトは「真・解法ⅠAⅡBC」と同じです．それは**「難関大を目指す普通の受験生向けの参考書決定版」**ということです．「難関大を目指すのならこの本をやっておけば大丈夫」と言われることを目指しています．受験生だけでなく，難関大志望者を指導される学校の先生や塾・予備校の講師の方も対象です．

主な特長を挙げておきます．

❶ 受験数学で重要なテーマを網羅し，良問を厳選

数学ⅢC（平面上の曲線，複素数平面）の範囲から，入試で頻出のテーマを網羅しています．例 題 も数多くの入試問題，有名問題から厳選しています．

❷ 試験本番で使える解法やテクニックを優先

その問題でしか使えないようなマニアックな解法は極力避け，他の問題にも広く使える汎用性のある解法や，地味でも点数が取りやすい堅実な解法を優先しました．また，検定教科書の内容に縛られることなく，入試で役立つ数学の道具や重要テクニックを数多くカバーしました．短期間で効率よくさまざまな解法を身に付けるには，まさにうってつけの参考書です．なお，第７章の「発展事項」は，大学「で」の数学を見据えた内容ですが，入試問題に関連しています．

❸ かつてない丁寧な解説，綺麗で正確な図を掲載

解説は非常に詳しいです．特に 例 題 の Point... では，着眼点や解法に至るプロセス，背景にある考え方などを極力フォローしました．なるべく多くのテーマに関連付けるため，「意味のある脱線」が多いです．受験生目線を重視し，私自身の経験をよく紹介しています．いわば「エッセイ風参考書」です．

図もふんだんに活用しています．すべての図は私自身がパソコンで作成し，美しさ，正確さにこだわっています．特に数Ⅲの華である求積での立体の図は必見です😊　また，原稿自体はTeXという組版ソフトを使い，デザインも含めすべて私１人で執筆しました．私が考える参考書執筆の理想形です．これが実現しただけでも東京出版には頭が上がりません😅

私のような凡人が数学の力を伸ばすためには，コツコツ努力を積み重ねるしか

ありません．しかし，本書にはその努力がなるべく苦痛にならないような工夫が散りばめられています．本書を通じて，数学が理解できる楽しさや面白さ，そして難関大合格の喜びを味わってもらえれば幸いです．

【本書の利用法】

本書は，問題編と解説編に分かれており，メインの解説編は，重要テーマの解説，例題，ポイントチェックの３つの部分から構成されています．

❶ 重要テーマの解説で知識を身に付けよう

入試で使える重要テーマの解説です．じっくり読んでその内容を理解しましょう．教科書に載っていないことも多く含まれますから，初めて触れる知識も多いはずです．「ふ〜ん」と流すのではなく，大いに感動しましょう．印象に残ったものはなかなか忘れないものです．よく「これは入試で使っていいのですか？」という質問を受けますが，正しければ入試で使っていけない知識などありません．

❷ 例題とポイントチェックで実戦的な力を養成しよう

重要テーマの解説で扱った知識が有効な例題です．まずは自分で実際に手を動かして解いてみましょう．その後，▶解答◀ と □Point... □ を確認してください．▶解答◀ は答案作成の模範になるようにかなり気を遣って作成しました．また，随所に番号（解答とリンクしているものは ❺ などとし，そうでないのは $\boxed{5}$ などとしました）を付け，解答に表れない重要な補足を □Point... □ で詳しく解説しています．「なぜこう解くのか」が納得できるまで熟読してください．

一般に，参考書というものはすべて完璧に理解する必要はありません．まずは軽い気持ちで興味がある部分から読み始めましょう．「すべて読まないといけない」ではなく，「読んだ分だけ力がつく」とポジティブにとらえることです．

【謝辞】

さまざまな経験をさせていただいた予備校関係者の方々や教え子たちに感謝します．現場での講師経験がなければとても書ける内容ではありませんでした．知的な刺激を与えてくださった同僚講師の方々にも感謝します．また，予備校講師の仕事を理解し支えてくれている家族に感謝します．

今回の原稿を作成するにあたり，emath という TEX のマクロを一部使わせていただいております．作成者の大熊一弘氏に感謝します．また，東京出版の飯島康之氏と坪田三千雄氏には，大変鋭いご指摘や貴重なご意見を数多くいただきました．ありがとうございました．最後に，私の原稿はすべて安田亨先生のご指導あってのものです．この場を借りてお礼申し上げます．

目　次

例題 **1−1.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+ax+3}+bx+1\right)=0$ が成り立つような定数 a, b の値を求めよ.　（オリジナル）

▷▷▷▷　解説は 36 ページ

例題 **1−2.** $0<r<1$ とし，半径 1 の円 C_1 と半径 r の円 C_2 の中心は一致しているとする．円 C_1 に内接し，円 C_2 に外接する円をできるだけたくさん描く．ただし，どの 2 つの円も共有点の個数は 1 以下とする．描いた円の円周の長さの総和を $f(r)$ とするとき，

$$\lim_{r\to1-0}f(r)$$

を求めよ.　（信州大）

▷▷▷▷　解説は 40 ページ

例題 **1−3.** n を正の整数とする．3 次方程式 $x^3+3nx^2-(3n+2)=0$ について次の問いに答えよ.

（1）　すべての正の整数 n について，上の 3 次方程式は正の解をただ 1 つしかもたないことを証明せよ.

（2）　各正の整数 n に対して，上の 3 次方程式の正の解を a_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ.　（弘前大・改）

▷▷▷▷　解説は 44 ページ

例題 **1−4.** 実数 x および自然数 n に対して，

$a_n=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ とする．以下の問いに答えよ.

（1）　x の値を決めると，$2^na_n\sin\dfrac{x}{2^n}$ の値は，n と無関係に一定であることを証明せよ.

（2）　$\log|a_n|$ を x で微分することにより，$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n}=\frac{1}{\pi}$ を証明せよ.　（名古屋大）

▷▷▷▷　解説は 50 ページ

第１節　極限の極意

極限　The limit

極限の極意はズバリ**「置き換え」**です．置き換えが重要なのは極限に限りませんが，極限の問題では特に重要です．基本的な例題を用いて確認します．

問題 1. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)$ を求めよ．　（関西大）

$f(x)=\sqrt{x^2+3x}+x$ とおきます．置き換えを利用しないと間違える可能性があります．よくある誤答は，いきなり x でくくって

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=\lim_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)=-\infty$$

とするものです．

正しく見えそうなのが厄介ですね😅　どこが間違えているか分かりますか？そうです．「x でくくるときにルートの中を x^2 で割っている」ところです．これは $x>0$ であれば問題ありませんが，$x<0$ のときは正しくありません．今回は $x \to -\infty$ を考えますから，$x<0$ です．ルートを x で割るためには，ルートの中身を x^2 でくくって，$\sqrt{x^2}=|x|$ を用います．

$$\begin{aligned} f(x)&=\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}+x=|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}}+x=-x\sqrt{1+\frac{3}{x}}+x \\ &=x\left(-\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right) \end{aligned}$$

となり，ルートにマイナスが付きます．このままでは $-\infty\times 0$ の不定形ですから，**分子を有理化**して

$$f(x)=x\cdot\frac{-\left(1+\frac{3}{x}\right)+1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{-3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}\xrightarrow[(x\to-\infty)]{}-\frac{3}{2}$$

となります．

ただ，このような変形を毎回行うのは面倒です．$x>0$ であれば注意する必要がないのですから，置き換えを利用して $x \to +\infty$ の問題に帰着させます．実際，

問題編
極限
微分
積分
求積
曲線
複素平面
発展事項
出典・テーマ

$t=-x$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to+\infty$ であり，また，$x=-t$ ですから

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{t^2-3t}-t\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{(t^2-3t)-t^2}{\sqrt{t^2-3t}+t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{-3t}{\sqrt{t^2-3t}+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\dfrac{3}{t}}+1}=-\frac{3}{2}$$

となります．$t>0$ ですから，ルートを t で割るときには中身を t^2 で割ればよいのが利いています．

もちろん，不定形にならない簡単な極限では置き換えるまでもありません．

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

などはそのまま考える方が簡単です．

一方，不定形になる極限では，置き換えを利用して，**$x\to0$ または $x\to+\infty$ の問題に帰着させる**のがよいです．$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$（☞ P.48），$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0$（☞ P.66）などの有名な公式が使えることが多いからです．

最後に，無限大に発散する極限でのプチテクニックです．例えば

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-3x+1}{x-1},\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2-3x+1}{x-1}$$

はどちらも発散しますが，$+\infty$ か $-\infty$ のどちらに発散するかが問題です．前者の極限は $x\to1-0$ ですから，x が小さい方から 1 に近づきます．x は 1 より少し小さく，$x=0.999\cdots$ のイメージです．分母は $-0.000\cdots$ ですから，これを -0 と表しましょう．形式的に $x-1$ に $x=1-0$ を代入した形になります．分子は普通に $x=1$ を代入して -1 です．結果，$\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$ は $\dfrac{-1}{-0}$ となり，符号は正，$\dfrac{1}{0}$ は無限大ですから，$+\infty$ に発散します．同様に，後者の極限は $\dfrac{-1}{+0}$ で $-\infty$ に発散します．

なお，$\dfrac{-1}{-0}$，$\dfrac{-1}{+0}$ などの表記は正式なものではありません．答案には書かないようにしましょう．あくまでイメージです．

〈極限のまとめ１〉

Check ▷▷▷▷ 極限の極意

- 置き換えを利用して $x\to0$ または $x\to+\infty$ の問題に帰着させる
- 無限大の符号を形式的に調べる

〈関数の極限〉

例題 **1−1.** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+ax+3}+bx+1\right)=0$ が成り立つような定数 a，b の値を求めよ．　（オリジナル）

考え方　まず置き換えを使用して，$t\to+\infty$ の問題に帰着させます．不定形を解消するために分子の有理化を用います．

▶解答◀　$t=-x$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to+\infty$ で，また，$x=-t$ であるから

◀ 置き換えを利用します．

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+ax+3}+bx+1\right)$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{2t^2-at+3}-bt+1\right)$$

$f(t)=\sqrt{2t^2-at+3}-bt+1$ とおくと，$t>0$ のとき

◀ 関数に名前を付けておくと便利です．

$$f(t)=t\left(\sqrt{2-\frac{a}{t}+\frac{3}{t^2}}-b+\frac{1}{t}\right)$$
$$\sqrt{2-\frac{a}{t}+\frac{3}{t^2}}-b+\frac{1}{t}=\frac{f(t)}{t}$$

◀ 最高次の項 t でくくります．$t\to+\infty$ を考えますから $t>0$ で，ルートの中身を t^2 で割ります．

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$ のとき，両辺で $t\to+\infty$ として

$$\sqrt{2}-b=0 \qquad \therefore\quad b=\sqrt{2}$$ （▷▷▷▷❶）

このとき

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{2t^2-at+3}-\sqrt{2}t+1\right)$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{(2t^2-at+3)-(\sqrt{2}t-1)^2}{\sqrt{2t^2-at+3}+\sqrt{2}t-1}$$ （▷▷▷▷❷）
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{(2\sqrt{2}-a)t+2}{\sqrt{2t^2-at+3}+\sqrt{2}t-1}$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\sqrt{2}-a+\frac{2}{t}}{\sqrt{2-\frac{a}{t}+\frac{3}{t^2}}+\sqrt{2}-\frac{1}{t}}=\frac{2\sqrt{2}-a}{2\sqrt{2}}$$

◀ 分母分子を最高次の項 t で割ります．

この値が０となる条件は

$$\frac{2\sqrt{2}-a}{2\sqrt{2}}=0 \qquad \therefore \quad a=2\sqrt{2}$$ （▷▷▷▷❸）

以上より，$\boldsymbol{a=2\sqrt{2},\ b=\sqrt{2}}$ である．

□ Point　The limit NEO ROAD TO SOLUTION 1－1　Check! □

❶ ▶解答◀ には敢えて明記しませんでしたが

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=0 \Longrightarrow \lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t}=0$$

ですから，$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t}=0$ は $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$ であるための必要条件です．もちろん，その結果得られる $b=\sqrt{2}$ も必要条件です．

「$f(t)=t\left(\sqrt{2-\dfrac{a}{t}+\dfrac{3}{t^2}}-b+\dfrac{1}{t}\right)$ と $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t=+\infty$ より，$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$ が有限の値０に収束するためには $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{2-\frac{a}{t}+\frac{3}{t^2}}-b+\frac{1}{t}\right)=0$ が必要である」としてもよいです．表現が異なるだけで，好みの問題です．

❷ 分母が１の分数とみて，**分子**を有理化します．「有理化は分母に対して行うもの」というのは間違った認識です．例えば，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とするのは，近似値を求めるとき以外，意味がありません．私は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ と $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のどちらが美しいかと聞かれて，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ と答える人とは分かり合える気がしません😓　数Ⅲでは極限，微分などで分子の有理化をすることがよくあります．

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{2t^2-at+3}-\sqrt{2}t+1\right)=\lim_{t\to+\infty}\left\{\sqrt{2t^2-at+3}-(\sqrt{2}t-1)\right\}$$

は $\infty-\infty$ の不定形ですが，その元凶は $\sqrt{2t^2-at+3}$ と $(\sqrt{2}t-1)$ の間の「－（マイナス）」です．これを「＋（プラス）」にするために分子を有理化します．その結果 $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形になりますが，分母分子を最高次の項で割れば解消できます．

❸ ❶で述べたとおり，$b=\sqrt{2}$ は必要条件です．十分性の確認が必要ですが，今回は最後に改めて確認しなくてもよいです．**自然に確認されている**からで

す．$b=\sqrt{2}$ の十分性の確認は，$f(t)$ に $b=\sqrt{2}$ を代入して $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$ となるかを調べることですが，$f(t)$ には a が残っていますから，このままでは $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$ となりません．そこで方針を転換し，$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$ となるような a を求めます．その結果得られた a に対しては $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)=0$ となりますから，$b=\sqrt{2}$ の十分性は保証されます．**$b=\sqrt{2}$ を代入するときから十分性の確認が始まり，a が求まった時点で十分性の確認が終了する**のです．

$\boxed{4}$　最初に b の符号で場合分けする方法もあります．

$b \leqq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{2t^2-at+3}-bt+1\right)=+\infty$ であり，不適です．

$b>0$ のとき，$f(t)$ の分子を有理化して

$$f(t)=\sqrt{2t^2-at+3}-bt+1=\frac{(2t^2-at+3)-(bt-1)^2}{\sqrt{2t^2-at+3}+bt-1}$$

$$=\frac{(2-b^2)t^2+(2b-a)t+2}{\sqrt{2t^2-at+3}+bt-1}=\frac{(2-b^2)t+2b-a+\dfrac{2}{t}}{\sqrt{2-\dfrac{a}{t}+\dfrac{3}{t^2}}+b-\dfrac{1}{t}}$$

$b>0$ のおかげで，$t\to+\infty$ のとき分母が $\sqrt{2}+b>0$ に収束することに注意しましょう．$2-b^2 \neq 0$ とすると，$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$ は $+\infty$ または $-\infty$ に発散して不適ですから

$$2-b^2=0 \qquad \therefore \quad b=\sqrt{2}$$

以下同様です．

$\boxed{5}$　結果だけなら簡単に求まります．ルートを外すことを考え中身を平方完成し

$$f(t)=\sqrt{2\left(t-\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{8}+3}-bt+1$$

とします．t が十分大きいとき，ルートの中の定数 $-\dfrac{a^2}{8}+3$ は無視できて

$$f(t)\fallingdotseq\sqrt{2\left(t-\frac{a}{4}\right)^2}-bt+1=\sqrt{2}\left(t-\frac{a}{4}\right)-bt+1$$

$$=(\sqrt{2}-b)t-\frac{a}{2\sqrt{2}}+1$$

となりますから，これが 0 になる条件は

$$\sqrt{2}-b=0,\ -\frac{a}{2\sqrt{2}}+1=0 \qquad \therefore \quad a=2\sqrt{2},\ b=\sqrt{2}$$

です．もちろん，これは答案には書けませんのでご注意を 😅

▶あとがき◀

元々，「解法への道！」というタイトルは予備校でオリジナル講座を担当していたときの講座名でした．当時の教務課長Ｍさんと２人で考えて決めたものです．そのＭさんはその予備校で私が最もお世話になった方ですが，残念ながら，程なくして退職されてしまいました．その後，オリジナル講座もなくなり，「解法への道」はお蔵入りになってしまったのですが，どんな形であれ，なんとか復活させたいとずっと考えていました．

時は流れ，ⅠＡⅡＢの原稿を書くにあたって，とりあえず，仮タイトルを「真･解法への道！」として執筆を始めました．一般に，参考書のタイトルは，出版社で会議などを通して決めることが多いようです．その場合，執筆者の意見は反映されません．ところが，東京出版は違いました．実際に出版できることになり，タイトルをどうするかという話になったのですが，「このタイトルでいいんじゃない？」という，いい意味での“軽いノリ”で正式に「真･解法への道！」に決まったのです．東京出版からの参考書という最高の形で思い出のタイトルを復活させることができました．東京出版，そしてＭさんに改めて感謝申し上げます．

今回も編集者の方々には非常に細かくチェックしていただき，様々なご指摘，ご提案をいただきました．そのおかげでさまざまな改善を重ね，「東京出版クオリティ」に仕上がったと自負しております．ぜひ「真･解法ⅠＡⅡＢＣ」とセットでご愛読していただき，数学を楽しんでいただけることを切に願っております．

難関大学受験対策　**真・解法への道！**
数学ⅢC（平面上の曲線，複素数平面）

令和６年12月10日　初版第１刷発行

著　者　箕輪　浩嗣
発行者　黒木憲太郎
発行所　株式会社 東京出版
〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7
電話：03-3407-3387　振替：00160-7-5286
https://www.tokyo-s.jp/

印刷所　株式会社 光陽メディア
製本所　株式会社 技秀堂
落丁・乱丁本がございましたら，送料弊社負担にてお取り替えいたします．

ISBN978-4-88742-284-1