



はじめに

くだらないことにクスリと笑ったり、ちょっとした「からくり」に面白さを感じたり。

数学を学んでゆく上で、「この問題はこう解けばよい」という姿勢だけで先へ先へと進んでゆくのは、非常にもったいないことです。

- どうすればそのような発想になるのか
- 解法のアイデアは他に生かせないのか
- 結局はどこが最大のカギとなったのか

といったことを考えてみるだけで、数学の勉強は非常に楽しいものになるからです。

「なんだ、えらそうに「すばらしい解答」を述べているけれど、結局は単にこう考えたっただけじゃん！」

「うわぁ、同じようにしてこんな問題も解決できちゃうんだ！」

「すごい結果に見えるけれど、からくりは実にくだらない、ああくくだらない」

もちろん、すべての数学の問題で、いちいちこのようなリアクションをすることは不可能です。ですが、3日に1回、そのようなシーンに出くわすだけで、数学力以前にまず、日々の生活が充実します。

本当に面白さを感じたことは、人に伝えたくな

ります。周りの友人に直接話す以外にも、学校の先生にレポートをおくったり、遠方の友人に手紙を送ったり、異国の友人にスカイプで話したり。

そして、面白さを感じるうえで、一番のポイントが「くだらない」ことです。くだらないと思うからこそ、面白いと思うのです。すばらしいと思うことがあっても、そこに面白さはありません。数学を学ぶということは、くだらなさを学ぶことです。それを通して、人としての洞察力と感動力、そして他者に対する表現力を磨くことなのです。

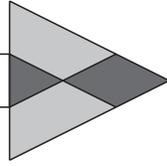
(だから数学ができるようになると英語も強くなるのですよ。逆は然りではないけれど。)

本書においては、数学の問題集という側面と同時に、この「くだらなさを学ぶ」要素もふんだんに取り込ませていただきました。基本問題からちょっとした応用問題までを通して、「ふふっ」と笑顔になるシーンを思いながら構成しています。

時に実力養成のために、時には答え合わせ用として、ある時はより深い理解のために、また、たまには息抜きがわりとして、本書とふれあってくれれば幸いです。

青木亮二

本書の構成と利用法



○本書の内容

基本的な事柄についての理解があり、一通りの「練習問題」をこなしてきた、という方を対象としています。もちろん、数学のエキスパートのみを対象としたものにはなっていませんが、未修事項を一から学ぶというには若干ハードルが高い内容になっています。

ですから、現在進行形で数ⅠAⅡBC（ベクトル）を学習中の方は、本書とは別に、参考書などと併用して使うことをお勧めします。いわゆる「網羅型」のものにはなっていないことをご承知おきください。

一通りはやったぞ、という方にとっては、本書は絶好の「サプリメント」となることと思います。「ただの問題」に、さまざまな角度からの見方を与えたり、共通した「考え方」を提示したり、と、すんなり答え合わせをするだけでは済まない構成になっていますから。

とはいうものの、使い方は好み次第。後述するように、本書の使い方にはさまざまなやり方があるかと思います。あなたにとって、都合の良いように使っていただければよいのです。

○本書の構成

各セクションごとに、問題編と解説編に分かれたつくりになっています。まずは問題編に取り組み、解説編を通して答え合わせをしてもらいます。各セクションでの問題数は平均5題程度となっているので、一つ一つの問題を解いて、その問題ごとに答え合わせをするのではなく、そのセクションの問題を一通り解いた上で、一気に答え合わせをするのが基本的な使い方となります（解説編の中には、問題編に収録されていない問題も少なからずあります。答え合わせをしてゆく中で、目にとまった問題があれば、それもあわせて取り組みましょう）。

想定している利用法をいくつかご紹介します。

【利用法その1：とにかく問題を解きたい！】

①各セクションの問題を一通り解く（★★★以上は飛ばしてもよい）。

→②一セクション分の問題を解き終えたら、解説編の

「囲みの問題」の部分だけを見ていき、該当する問題番号を探して答えあわせをする。

→③答えが合わない問題があれば、結果が一致するまで取り組む。

→④結果がすべて合えば、あるいは、解けなかった問題すべてにあきらめがつけば、次のセクションへと進む。

【利用法その2：プラス α の手法・発想を学びたい！】

①各セクションの問題を一通り解く。

→②→③

→⑤結果がすべて合えば、あるいは、解けなかった問題すべてにあきらめがつけば、解説編を一通り読む。

→⑥解説編中に登場する、問題編には登場していない問題があれば、それにも取り組む。その後、次のセクションへと進む。

【利用法その3：まずは基礎固めからしっかりやりたい！】

⑦各セクションの問題のうち、「★」の問題をすべて解く。

→②→③→⑤

→⑧「★★」以上の問題の解説を参考に、自分なりに答案を作ってみる。その後、次のセクションへと進む。

【利用法その4：読み物として楽しみたい！】

⑨気の向いたときに気の向いたセクションの解説編を読む。

→⑩気の向いたときに、解説編を読んだセクションの問題編の問題に取り組む。

→⑪基本的には「つんどく積読」

いずれの使用法においても、一日1セクションのペースで無理なく進める量になっています。また、各セクションは独立した内容になっていますから、必ずしも章立てどおりに進めてゆく必要はありません。どうぞ、無理のない形で進めて下さい。

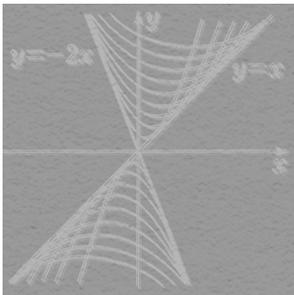
入試のツボを押さえる

重点学習

数学ⅠAⅡBC(ベクトル) **増補版**

目次

はじめに.....	3
本書の構成と利用法.....	4



第1章 場合の数

1 場合の数での標準装備	10
2 Imagine	16
3 毛色が変わった経路の問題	22
4 「置き換え」にこだわってみる	28

第2章 確率

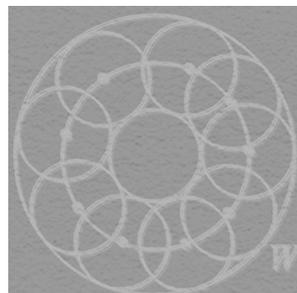
1 岡目八目な確率	34
2 細かく分けて考えれば	40
3 何が対等かが問題だ	46
4 耐えて耐えての確率	52
5 有名問題でおもてなし	58

第3章 整数, 多項式, 論証

1 余りから学ぶ「あたりまえ」	66
2 有理数・無理数とその論証	72
3 論証問題にのぞむということ	80
4 多項式がらみの論証	86
5 素因数分解形を考える	92
6 「べき乗数」いろいろ	98
7 仕上げはフェルマーで	106

第4章 数列

1 和の問題のさまざま	114
2 解ける漸化式の典型	120
3 一般項は求めずに	126
4 フィボで学ぶ数列の基本	132

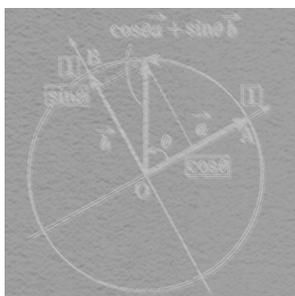


第5章 ベクトル, 図形

1 ベクトルの1次結合と回転	138
2 内積についてのお話	144
3 平面の式の扱い	150
4 順番に動かせば	156
5 外接円と内接円	162

第6章 方程式, 不等式, 数Ⅱの微積分

1 解と係数の蜜な関係	168
2 数Ⅱ微積分の問題たち	174
3 4次以上の関数の微分	180
4 おめかししてみた	188
5 もっておくべき二つの見方	194
6 はじかしい Max, Min	200



第7章 座標

1 さまざまな攻め方で	206
2 ひねり出された式	212
3 あたりまえにもほどがある	218
4 変換後の図形の式	224
5 軌跡問題へのさまざまなアプローチ	230
6 吟味のころ	236

第8章 風変わり系

1 風変わり系で総確認!	242
--------------	-----

三二講座

- | | |
|-----------------|-----|
| ① レイリーの定理 | 104 |
| ② ウィルソンの定理 | 112 |
| ③ 相加相乗平均の不等式の証明 | 186 |

Teatime

- | | |
|-----------------------|-----|
| 覚えておくと人生が565倍楽しくなる数たち | 113 |
| どうでもいい話 ～いまとむかし～ | 187 |



◆1 場合の数での標準装備

数 A

問題編

チェック!

難易度

★

問題 1-1.1

区別のつかない赤玉と白玉が6個ずつある。これら12個を横一列に並べる方法のうち、赤と白とがこの順でとなりあう箇所がちょうど3つであるようなものは何通りあるか。

(例えば、赤白白赤白白赤白白赤赤赤 のような並びが条件を満たす。)

チェック!

難易度

★

問題 1-1.2

n 桁 ($n \geq 2$) の正の整数で、145221 や 26000 の様に、同じ数字がとなりあうような部分を持つものは何通りあるか。

チェック!

難易度

★

問題 1-1.3

n 桁の正の整数で、各桁の積が6の倍数となるものはいくつあるか。ただし、0も6の倍数である。

◇1 場合の数での標準装備

数 A

解説編

本稿では、場合の数の問題を扱います。五月雨式に、「こんなパターンもある、あんなパターンもある」と列挙してゆくのも芸がありませんから、「標準装備しておきたい」ことがら2つ、にテーマをしぼってお話したいと思います。

ちなみに、五月雨は「さみだれ」と読みます。いちいち五月蠅いことをいわなくても大丈夫ですね。

§1 「重複組合せ」はおいしい

私たちは、ある程度の数え上げは「基本」として身につけています。

- 重複順列：異なる n 個のものを、重複を許して r 個並べる方法は n^r 通り
- 順列：異なる n 個のものを、重複を許さずに r 個並べる方法は ${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ 通り
- 組合せ：異なる n 個のものを、重複を許さずに r 個選ぶ方法は ${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ 通り

こうしてみると、一つだけ「まとめそこなっている」ものの存在がはっきりと浮かび上がってきます。そうです、「重複組合せ」です。

教科書上では「発展」として取り扱われているものですが、これを機会に「標準装備」としてみましよう。

【重複組合せ】

異なる n 個のものから、重複を許して r 個選ぶ組合せの総数を ${}_n H_r$ で表わす。

$${}_n H_r = {}_{n+r-1} C_r \dots\dots\dots *$$

である。

例えば、普通の組合せ ${}_n C_r$ が「 n 種類の果物から、 r 個の異なる果物を用いてフルーツバスケットをつくる方法」

を表わすのに対して、重複組合せ ${}_n H_r$ は

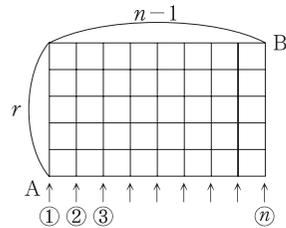
「 n 種類の果物から、 r 個の果物（同じものを用いてもよい）を用いてフルーツバスケットをつくる方法」

を表わします。りんご、なし、みかん、かき、を用いて、10 個の果物からなるフルーツバスケットを作る方法は

${}_{14} H_{10}$ で表わされます。 $n < r$ でも、 ${}_n H_r$ が定義できることに注意してください。

この重複組合せが*の様に計算できることは、適当な場合の数のモデルを2通りに計算することで分かります。ここでは、「経路」を用いて示してみましよう。

図のような、 $r \times (n-1)$ の小道を用意し、A から B への最短経路の総数 S を考えます。



「ふつうに」解くならば、「縦(↑)」 r 個と「横(→)」 $n-1$ 個の順列と、A から B への最短経路とが一对一に対応することから、 $S = {}_{n+r-1} C_r$ で計算しますが、図の①から⑦の縦道の、どの r 箇所でも上に進むかを考えても S を立式できます。

①から⑦の中から、重複を許して r 箇所を選べば、それに応じて A から B への最短経路が得られ、逆に、A から B への最短経路から、重複組合せを得ることができます。 n 箇所から重複を許して r 箇所選ぶ重複組合せと最短経路とが一对一に対応するので、 $S = {}_n H_r$ とも表わせるということです。

これで、*の結果を得ることができました。

重複組合せ自体は、毎回、対応付けを考えて計算することも可能なのですが、さらに「あ、重複組合せだ」と見ることができるシーンにおいては、H でその場合の数を表現して、*で計算してしまう方が、楽です！ストレスも感じません。

さっそくみてみましょう。

問題 n を正の整数とする。

(1) $x+y+z=n$ の非負整数解 (x, y, z) の組数を求めよ。

(2) $1 \leq x \leq y \leq z \leq n$ を満たす整数 x, y, z は何組あるか。

慣れてくるとどちらも「あたりまえ」に見えますが、ここでは「少し丁寧に」解説をつけておきましょう。

解 (1) X, Y, Z から、重複を許して n 個選ぶ方法は ${}_3H_n$ 通りで、 X, Y, Z をそれぞれ x, y, z 個選ぶと考えれば、この方法は $x+y+z=n$ の非負整数解と一対一に対応するので、求めるべき場合の数は

$${}_3H_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2$$

(2) 1 以上 n 以下の整数から、重複を許して 3 つを選び、それを小さい順に x, y, z とすれば、これは与えられた条件を満たす。逆に、 $1 \leq x \leq y \leq z \leq n$ を満たす整数 x, y, z を 3 つの整数の組とみなせば、その組合せは、1 以上 n 以下の整数から重複を許して 3 つを選ぶ組合せにもなっている。従って、条件を満たす x, y, z の組と、1 以上 n 以下の整数から重複を許して 3 つを選ぶ重複組合せは一対一に対応するとわかるので、求めるべき場合の数は ${}_nH_3 = {}_{n+2}C_3$ 。

冷静に考え、そしてかつ慣れてくれば、(2) の組数は重複組合せの総数の定義そのものにとらえることもできますし、(1) は「つまり x, y, z を合計 n 個集めるということ」というイメージで理解できます。答案作成の上では、(1)(2) とも、単に「 \sim なる重複組合せと考えて」の一言で済ませてよいでしょう。

問題 区別の付かない赤玉と白玉が、それぞれ 7 個と 3 個ずつある。これらを、白玉同士がとなりあわないように横一列に並べる方法は何通りあるか。2 通り以上の方法で求めよ。

単なる組合せの問題に帰着させるか、重複組合せの問題に帰着させるか、で 2 通りの立式が可能です。

解 1 あらかじめ赤玉を横一列  に並べ、図の 8 つの矢印から、 異なる 3 箇所を選んで白玉を挿入すると考えれば、求めるべき場合の数は ${}_8C_3 = 56$ 通り。

解 2 あらかじめ、白玉同士の間  に赤玉を一つずつ入れておき、 図の 4 つの矢印のうち、同じ箇所を選ぶことを許して 5 箇所を選び、そこに赤玉を挿入すると考えれば、求めるべき場合の数は ${}_4H_5 = {}_8C_5 = 56$ 通り。

⇒注 この問題を一般化することでも、重複組合せの計算式*を得ることが可能です。

場合の数や確率の問題に接する場合、「自分の答が正しいわけがない」と疑ってかかることが一番肝要です。この手の話題においては、「勘違いに気付きにくい」と

いう側面が他の分野に比べて非常に強いからです。ですから、このようなやさしい問題に対してでも、2 通り以上の方法で答が出せることはとてもおいしいことなのです。

では、少し骨っぽい問題に挑戦してみましょう。

問題 1-1.1 区別のつかない赤玉と白玉が 6 個ずつある。これら 12 個を横一列に並べる方法のうち、赤と白がこの順でとなりあう箇所がちょうど 3 つであるようなものは何通りあるか。(例えば、赤白白赤白白赤白白赤赤赤のような並びが条件を満たす。)

解 連続するいくつか(一つ以上)の同色の玉を囲んで考えれば(例えば、先の例だと

赤 白白白 赤 白 赤 白白 赤赤赤
の様に同色同士が連続するので、これを


と表現することにする)、ありえる囲みの配列は

- (あ) 
- (い) 
- (う) 
- (え) 

の 4 パターンである。

(あ) のパターンのものは、あらかじめ赤と白を 4 個と 3 個、交互に並べておき、余った赤 2 つと白 3 つを、同じ囲みを許して、赤は  のどこかに、白は  のどこかに挿入すると考えれば、

赤の入れ方は ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$ 通り

白の入れ方は ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$ 通り

なので、 $10 \times 10 = 100$ 通りあるとわかる。

(い) のパターンのものも、(あ) とまったく同様に考えて 100 通りある。

(う) のパターンのものは、赤の入れ方が ${}_3H_3$ 通りになる以外は(あ)と同じだが、 ${}_4H_2 = {}_3H_3$ であったので、結局(あ)と同じで 100 通りあることになる。

(え) のパターンのものも、白の入れ方が ${}_4H_2$ 通りになる以外は(あ)と同じなので、やはり 100 通りある。

以上から、求めるべき場合の数は $100 \times 4 = 400$ 通りとわかる。*

一通りの攻め方だけだと不安が少し残ります。違った角度からの別解もみてみましょう。

別解 、、、 A, A, A, B, B, B を横一列に、ただし A と B がこの順でとなりあわないように並べる方法の総数を求めればよい。

\overline{AB} を C と表わしなおせば、

A, A, A, B, B, B, C, C, C

を横一列に、ただし A と B がこの順でとなりあわないように並べる方法の総数を求めればよい。

まず、A, A, A, C, C, C を横一列に並べ、そのうち、A の右側以外の 4 箇所から、重複を許して 3 箇所を選び、B を挿入すると考えれば、求めるべき場合の数は ${}^6C_3 \times {}_4H_3 = 20 \times {}_6C_3 = 20 \times 20 = 400$ 通り。⑤

立式の仕方が違う様子を見れば、結論の一致をみることで「安心」を買うことができます。大切にすべき「安心感」とは、原発問題のような大きなところ以外にも求めるべきものです。

§2 余事象の「活用」

場合の数を、余事象（⇨注）に着目して数えることはしばしばあります。基本的に、余事象に着目するのは、

条件を満たさないパターンが圧倒的に少ない

場合が基本で、例えば、次のような問題であれば、迷わず余事象に着目して処理、で問題ないでしょう。

⇨注 ここでは、確率の用語を広くとらえ、「条件を満たさないもの」という意味で「余事象」という言葉を用いています。正式な使い方ではないをご承知おきください。

問題 1-1.2 n 桁 ($n \geq 2$) の正の整数で、145221 や 26000 の様に、同じ数字がとなりあうような部分を持つものは何通りあるか。

条件を満たすもののパターンは無数（例えば、 $n=6$ としても 145221 や 223445 や 233333 など、さまざまな「形」があります）なのに対して、条件を満たさないものは、「左から二番目以降の桁は、どれも直前の桁の数字と異なる」ようなものの 1 パターンしかありません。

解 n 桁の正の整数は全部で $9 \times 10^{n-1}$ 通りあり、そのうち、条件を満たさないものは、首位の数の選び方 $\dots 1 \sim 9$ の 9 通り
首位以降の数字の選び方 \dots 左隣の数字以外の 9 通りより、 $9 \times 9^{n-1} = 9^n$ 通りある。
従って、求めるべき場合の数は $9 \times 10^{n-1} - 9^n$ 通り。⑥

問題 1-1.3 n 桁の正の整数で、各桁の積が 6 の倍数となるものはいくつあるか。ただし、0 も 6 の倍数である。

「6 の倍数」は「2 の倍数かつ 3 の倍数」と、素因数分解形で考えるのが基本ですが、2 の倍数かつ 3 の倍数で

あるものといっても、やはりさまざまなパターンがあります ($n=3$ だとしても、123, 634, 501 と、やはりさまざまな「形」がありますね)。

解 n 桁の正の整数 $9 \times 10^{n-1}$ 通りのうち、条件を満たさないものは、

A: 各桁がどれも 2 の倍数ではない

B: 各桁がどれも 3 の倍数ではない

の少なくとも一方の条件を満たすものである。

$N(X)$ で、 X を満たすものの個数を表わすことにすれば、

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

であり、

$$N(A) = (\text{各桁が } 1, 3, 5, 7, 9 \text{ のいずれかのものの個数}) = 5^n$$

$$N(B) = (\text{各桁が } 1, 2, 4, 5, 7, 8 \text{ のいずれかのものの個数}) = 6^n$$

$$N(A \cap B) = (\text{各桁が } 1, 5, 7 \text{ のいずれかのものの個数}) = 3^n$$

であるから、求めるべき場合の数は

$$9 \times 10^{n-1} - 5^n - 6^n + 3^n \text{ 通り。} \textcircled{7}$$

ここであげたような「極端なケース」以外の場合でも、あえて余事象に着目することで、違った視点でアプローチすることができたり（従って、2 通り以上の解法で解くことにより安心感が買える！）、より楽に解を得られたりします。この章でみておきたいのは、先の例よりも、むしろ次のような問題に対する攻め方です。

問題 1-1.4 n 桁 ($n \geq 2$) の正の整数で、となりあう桁の数字が異なるようなものの集合 S_n の要素のうち、1 の位が 0 であるものの個数 a_n を求めよ。

意識的に「余事象は？」と考えてみましょう。 S_n の要素の総数は容易に計算できましたから、「 S_n の要素のうち、1 の位が 0 でないものの個数 b_n 」を考える、というのが素直な発想ですが、

「 a_n を求めようか、 b_n を求めようか」ではなく、「両方求めちゃおう！」

というのが、ここで常識にしておきたいことがらです。

解 S_n の要素のうち、1 の位が 0 であるものからなる集合を T_n 、1 の位が 0 でないものからなる集合を U_n とし、 U_n の要素の個数を b_n とする。

T_n の要素一つに対して、末尾に 1~9 の数字を加えることで U_{n+1} の要素が 9 個得られ、 U_n の要素一つに対しては、末尾に 0~9 のうち、もとの要素の 1 の位 (0 でない) 以外の 9 つを加えることで、 T_{n+1} の要素 1 つ

あとがき

読者の皆さんに、「ほら、これだけの話でしょ？」という姿勢でただらだと語り続けて、かれこれうん年が経ちました。実際に手に取って読んでくれている方は見えませんが、毎回毎回、昔の友人を思いつつ、今、私のそばにいるよき友人に向けつつ、つねに「人」を思いながら書き連ねてきました。喫茶店で珈琲を飲みながら気軽に話し、盛り上がるようなイメージで、書き連ねてきました。いざ、連載をまとめてみると、まるで10年間の日記のように思えてしまい、そのような「日記」を出版するというのはいささかこっぴどかしい気がします。

まあよい、みな生の贅になるうではないか、と、そんな心境です。

人に対してものを書く、という作業は、とても楽しいことです。それは、喜びを人に伝えるのが楽しいからだと思えます。本当の意味で皆さんに伝えたいのは、書く

ことを楽しんでいる、という姿なのかもしれません。こんな青年（おじさんではない）が、馬鹿みたいに目を輝かせて語っているんだよ、と。

数学を学ぶ人は、すべて魅力的であって欲しいと思います。どのような魅力でも構いません。素敵な人であって欲しいのです。もしかすると、「受験」という目標には無関係なことかもしれませんが、とても大切なことだと思うのです。素敵である、ということが。

偉そうな話になってしまいましたね。とにもかくにも、本書を手にとってくれたすべての人々に感謝申し上げて、締めくくりとさせていただきます。あわせて、このような連載の機会を与えてくださった浦辺元編集長、ならびに、編集にあたってさまざまなアドバイスをいただいた、坪田さんをはじめ東京出版編集部のみなさん、月刊誌「大学への数学」を通して素敵な交遊関係を築いていただいた、ピーター・フランクル先生、栗田哲也先生、古川昭夫先生に、あらためて感謝の意を表したいと思えます。

※本書は、月刊『大学への数学』に、2006年～2011年に連載した“弾き語りの数学”と、2012年～2015年、2018年～2020年に連載した“講義／数ⅠAⅡB”から、抜粋・再編集・加筆したものです。

入試のツボを押さえる重点学習——数学ⅠAⅡB(C(ベクトル) 増補版

2024年12月16日 第1刷発行

著者 青木亮二
発行者 黒木憲太郎
発行所 株式会社 東京出版
〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7
電話 03-3407-3387 振替 00160-7-5286
整版所 錦美堂整版株式会社
印刷所 株式会社光陽メディア
製本所 株式会社技秀堂製本部

落丁・乱丁本がございましたら、送料小社負担にてお取替えいたします。

©Ryouji Aoki 2024

Printed in Japan

ISBN 978-4-88742-285-8 (定価はカバーに表示してあります。)