



はじめに

数学というのは、楽しいものです。楽しくなければ数学ではありません（対偶）。ただ、どうも、この「楽しい」という言葉は大きさととらえられがちなようです。

- ・定理の美しさを楽しまなければいけない
- ・エレガントな解法を味わう楽しさを

そんな、上品な「楽しさ」だけを考えるなんて、実に堅苦しい。

新たな概念や手法を学ぶだけでも十分楽しいこと。そして、

がりがり大変な計算をした挙句、結果は全然違い、その後「うまい計算の仕方」を学んだが、くやしくて「大変な計算」で結果が合うまで頑張った。そんな自分にほっこりした。とても見かけのいかつい定積分が、一工夫であっさり計算できた。まさに見掛け倒しだなあ、と微笑ましくなった。

おおざっぱにはこんな感じなんですよ？ と思いながら計算したら、全然違う結果になった。よくよく考えれば、自分が壮大な思い違いをしていたことに気が付いて、自分で自分を殴りたくなった。一周回って、そんな見事な思い違いができる自分に笑ってしまった。

などという、庶民的な「楽しさ」も立派な楽しさ。受験生の方にとっては、「楽しさなんぞ、二の次だ」と思うかもしれません。それでも、楽しむことを心掛けてほしいのです。答え合わせの前に、自分で計算ミスに気づけた。そんなささいな喜びを楽しむことでも十分です。楽しみは私たちに「活力」を与えてくれますから。

本当に楽しめないのであれば、受験に数学を使うのをやめればよろしい。ただ、そう言われて「はい、やめます」という人はほとんどいないことと思います。なんだかんだで、本当は多くの人が「数学好き」なのですよ。

さて。

数学を学んでゆくうえで大切なこと、それは

- ・わからないことに目を伏せない
- ・自分の言葉で理解する

の2つでしょう。

どちらも、あたりまえといえばあたりまえのことですが、時に「そういうものなんでしょ？」と、あえて理解をしようとするところから逃げたり、「みんなこうしてるからこれでいいんじゃない？」と、よく分かってもない表現や道具を使ってしまったり。

高校で学ぶ数Ⅲ微積分の世界では、どうしても「ある程度のこと」は認めざるを得ない部分も多くなってきます。「連続関数は積分可能である」ことを「証明」せよ、などといわれても、その道具をすべてそろえるのは大変（大学での範疇）。ですが、だからといって何でもかんでも「公式だ！」としてよいことにはならないでしょう。

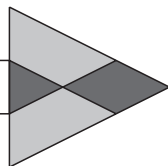
数ⅢC、とりわけ数Ⅲ微積分を学びはじめの頃というのは、実際それまでの数ⅠAⅡBの範囲とは違った、「強く、硬い世界」というイメージをもったことかと思います。それが、いつしか「なんとなくわかったような」形に変わり、今現在に至る、という人も多いことでしょう。

本書においては、数学の問題集という姿こそしておりますが、この「なんとなく」をもう少し突き詰めましょうよ、というところも、楽しく提案しています。

時には実力養成のために、時には辞書がわりに、また、たまには息抜きがわりとして、本書とふれあっていただければ幸いです。

青木亮二

本書の構成と利用法



○本書の内容

数ⅢC(複素数平面, 二次曲線)についての基本事項を学習し, 一通りの「練習問題」をこなしてきた, という方を対象としており, 初修として使うにはややハードルの高い内容になっております. ですから, 現在進行形でこの分野を学習中である, という方は, 本書とは別に参考書や問題集を用意して, という形での併用がお勧めです. また, 全ての話題をくまなく汲みつくす, といった「網羅型」にはなっていないこともご承知おきください.

一通りはやったけれど, という方にとっての, サプリメント的な位置づけの本(としては最高の本)であると理解していただければ結構です. 「やり方は, 知っているけれど」といった話に対して, より深く, あるいはさまざまな方向からの視点で掘り下げてゆくことで, 数学的常識を増やす・深めることができることでしょう. 問題編には, 問題のみが切り出された形で並びますが, その問題に対する解答がわかりやすい位置に置かれている, という構図にはなっておりません. 解説編の中において, 一連の話の途中でその解答が配置されている形になっております. 「使いにくい」と思われるかもしれませんが, 解答を探す中で, 半強制的に「文章」を読まされる, という経験があなたの数学的感覚を豊かにしてくれる, と考えましょう.

連載ものをまとめたもの(月刊「大学への数学」2017年~2024年)ですので, 似たような話題, 問題がかかる部分もあることはご容赦ください.

○本書の構成

各セクション(ここでは◇1などのこと)ごとに, 問題編と解説編に分かれたつくりになっています. まずは問題編に取り組み, 解説編を通して答え合わせをしても

まいります. 各セクションの問題数は, そう多いものではありませんので, 「一つ一つを解いて, 答え合わせをする」のではなく, 答え合わせの前に一通りの問題を一気に解き, そして一気に答え合わせをするのがよいでしょう.

想定している利用法をいくつかご紹介します.

【利用法その1: とにかく問題を解きたい!】

①各セクションの問題を一通り解く.

→②ひとセクション分の問題を解き終えたら, 解説編の「囲みの部分」だけを見てゆき, 該当する問題番号を探して答え合わせをする.

→③答えが合わない問題があれば, 結果が一致するまで取り組む.

→結果がすべて合えば, あるいは解けなかった問題すべてにあきらめがつけば, 次のセクションへと進む.

【利用法その2: プラス α の手法・発想を学びたい!】

①各セクションの問題を一通り解く.

→②→③

→⑤結果がすべて合えば, あるいは解けなかった問題すべてにあきらめがつけば, 解説編を一通り読む.

→⑥授業ノートをとるような雰囲気では, 解説編の内容を自分なりにノートにまとめる.

【利用法その3: 種々の手法の辞書がわりとして使いたい!】

⑦日ごろの学習の中で, 「おうぎ形近似」や「1のべき乗根」といった, ああ, なんだっけ, といった話題に遭遇するタイミングで, 該当するセクションの問題を一通り解く.

→⑤→⑥

→⑧気の向いたときに, 目を通していないセクションの

解説編を読む。

→⑨不安を感じたら、該当するセクションの問題を一通り解く。

→⑩すべてを読破しようとは考えない（不本意ではありませんが）。

いずれの使用法においても、一日1セクションのペースで無理なく進める量になっています。また、各セクションは一話完結型の独立スタイルになっておりますから、必ずしも章立て通りに進めてゆく必要はありません。どうぞ無理のない形で進めてください。

○問題の難度

いわゆる典型問題から、創作問題まで幅広く収録されております。入試問題の場合であっても、通常の問題集とは異なり、各問題に出典（どこの大学の問題か）を付すことは（原則）しておりません。皆さんが学習してゆくうえで、邪念がはいりこまないように、との配慮からです。基本的には、いずれのセクションにおいても、「やさしいところ」からスタートをし、最後は難関～最難関国公立大に対応するレベルの問題に落ち着くスタイルですので、そこのところはご安心ください。ざっくりとした難度の目安として、各問題ごとに「★」をつけることで表現しております。

★…いわゆる基本問題。基礎が定着しているならば、解けなければまずいよ、という問題。

★★…基本問題というわけではないが、受験生としてはそれなりに対応できてほしい問題。30分が目安（解説編中の「目安」も参照）。

★★★…それなりに手数もかかり、実際の入試においては「あとまわし」にしてもよいレベルだが、実力養成の

観点からは仕上げられるようになっておいてほしい問題。長くても1時間で仕上げるのが目安。

★★★★…ここまではできなくてもよいが、せっかくなので取り組んでみてください、というチャレンジ問題的な位置づけにある問題。時間は無制限でよい。

本書に収録されている問題の大半は「★」あるいは「★★」ですので、一つずつの難度にはもちろん差があります。「定石と常識さえ身につけていれば、確実に答えが出せるはず」という類の問題には、多少重たいものでもすべて「★」をつけていますので、「★」の中にはかかる時間や難度に差があることもあります。目安の時間を設けていないのは、そういった事情によるものです。

○解説編について

「問題を解く」のは、仮に解けなかったり、ナンセンスな答えを出そうとも、それはそれで楽しいものです。対して、「文章を読む」というのは、とても大変な作業です。本気で読みこなそうというならば、それはそれでものすごく疲れる。ですが、「読む力」がなければ、「書く力」も「表現する力」も備わりません。

少しでも「読んでみようかな」という気が起きるよう、なるべくやわらかい表現に努めて執筆をしておりますが、かくいう私も、人の（数学にまつわる）文章を読むというのはそこまで好き好んでは行えませんので、皆さんに「ぜひ解説編をすみからすみまで読み倒してくれ」という気は毛頭ございません。

はじめのうちは、「必死に読もう」という姿勢ではなく、「答え合わせのついでに目に入ったところだけを読む」というスタイルでも十分です。そうした行為を通して、徐々に「読む」作業を増やしていってもらえればと思います。

入試のツボを押さえる

重点学習

数学ⅢC (平面上の曲線, 複素数平面)

表紙イラスト：柘田千穂

目次

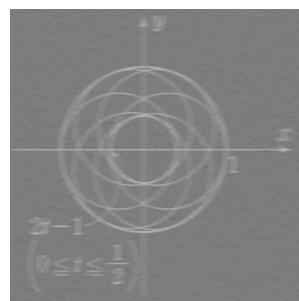
はじめに.....	3
本書の構成と利用法.....	4

第1章 極限

1 基本極限とその背景	8
2 大ざっぱに, 極限!	14
3 ざっくりと, 極限	20
4 ちょっぴりディープに極限を	26

第2章 微分法

1 「あきらかじゃん」とは言わないで	32
2 微分法と不等式のいろいろ	38
3 関数の増減とその周辺	44
4 数Ⅲ微分に接する	50
5 接線をものにする	56

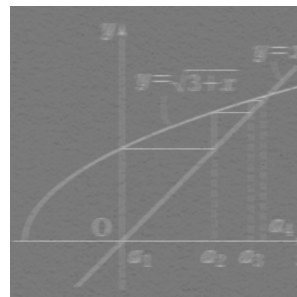


第3章 積分法(数式)

1 三角がらみの定積分計算	62
2 三角がらみの定積分をいろいろと	68
3 楽をして, の定積分計算	74
コラム $I = \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$	80

第4章 積分法(面積, 体積, 弧長)

1	面積のさまざま	84
2	面積の問題でいろいろと	90
3	面積の問題で“反省会”	96
4	三角形近似での求積	102
5	回転体の求積のさまざま	108
6	回転体のさまざま	114
7	回転体の体積とその周辺	120
8	非回転体のいろいろ	126
9	体積の問題でいろいろと	132
10	弧長とさまざまな近似な見方	138

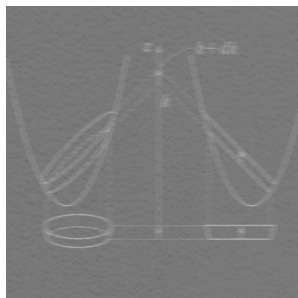


第5章 複素数平面

1	1のべき乗根についていろいろと	144
2	式の表わす図形に深入り	150
3	図形問題と複素数平面	156

第6章 平面上の曲線(2次曲線)

1	楕円・双曲線と偏倍	162
2	二次曲線で手を動かして	168
3	夢いっぱい、双曲線!	174



第7章 融合・複合・総合

1	極限がらみで総仕上げ!	180
2	不等式がらみでいろいろと	186
3	無限級数の和と定積分	192
4	近似と評価のさまざま	198
5	すべらずに ときどきしながら ころがりこむ	204
6	点のうごきで総確認!	210

◇2 微分法と不等式のいろいろ

数 III
問題編

エック!
□ □

難易度
★

問題 2-2.1

(1) $x \geq 0$ のとき、以下の不等式が成り立つことを示せ.

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \dots\dots\dots *$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ を求めよ.

エック!
□ □

難易度
★

問題 2-2.2

$x > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ.

$$x \log x \geq -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \dots\dots\dots *$$

エック!
□ □

難易度
★★

問題 2-2.3

$a \geq b > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ.

$$(a+b)(\log b - \log a) \leq 2(b-a) \dots\dots\dots *$$

エック!
□ □

難易度
★★

問題 2-2.4

a, b, c, x, y, z を正の数とする.

(1) $\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} \geq \frac{(a+b)^3}{(x+y)^2} \dots\dots\dots \textcircled{1}$ を示せ.

(2) $\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq \frac{(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2} \dots\dots\dots \textcircled{2}$ を示せ.

◇2 微分法と不等式のいろいろ

数 III

解説編

今回は、不等式の証明の、微分法による解決をいろいろとみてゆきましょう。ひと口に不等式、といっても、そのスタイルはさまざまです。シンプルなものから順番に進んでゆきます。では、出発！

* * * * *

まずは、一変数の不等式からです。よくあるタイプの問題ですが、せっかくですから少し手を動かしてみてください。

問題 2-2.1 (1) $x \geq 0$ のとき、以下の不等式が成り立つことを示せ。

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \dots\dots *$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ を求めよ。

不等式の基本は、「差をとって0以上、を示す」です。基本に忠実に進めましょう。(2)では、「ついうっかり」をやらないように気を付けてくださいね。

解 (1) $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ とおくと、

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$f''(x) = -\sin x + x$$

$$f'''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$$

従って、 $f''(x)$ は単調増加で、 $f''(0) = 0$ であるから $x \geq 0$ において $f''(x) \geq 0$

ゆえに、 $f'(x)$ ($x \geq 0$) は単調増加で、 $f'(0) = 0$ であるから、 $x \geq 0$ において $f'(x) \geq 0$

ゆえに、 $x \geq 0$ において $f(x)$ は単調増加で、 $f(0) = 0$ であるから、 $x \geq 0$ において $f(x) \geq 0$ である。

これで、*において (左辺) \leq (中辺) が示された。

次に、 $g(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \sin x$ とおくと、

$$g'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$$

$$g''(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x = f(x) \geq 0 \quad (x \geq 0)$$

従って、 $g'(x)$ ($x \geq 0$) は単調増加で、 $g'(0) = 0$ で

あるから、 $x \geq 0$ において $g'(x) \geq 0$

ゆえに、 $x \geq 0$ において $g(x)$ は単調増加で、 $g(0) = 0$ であるから、 $x \geq 0$ において $g(x) \geq 0$ である。

これで、*において (中辺) \leq (右辺) が示され、題意の不等式を得る。☺

(2) *の不等式から、 $x > 0$ において

$$\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$$

であるから、各辺を x^3 (> 0) で割れば

$$\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$$

$x \rightarrow +0$ のとき、(左辺) $\rightarrow \frac{1}{6}$ であるから、はさみうちの

原理より、 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ とわかる。 $\frac{x - \sin x}{x^3}$ は

偶関数であるから、 $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ でもある。

ゆえに、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ ☺

(1)は、差の関数 $f(x)$ の最小値を探ろう、という流れですが、一度微分して符号が分からないのであれば、「繰り返し微分して」符号が分かるころまで進むのがポイントです。しばしば「井戸掘り」に例えられ、

「1回微分する」=「10メートル掘る」

とみるなら、

10メートル掘っても水がでない

→さらに10メートル掘ろうか

ということになるわけです。

今回の $f(x)$ の場合は、結果的に「30メートル」掘って、初めて水が出た (=符号が分かった) わけで、その後はその水を「くみあげる」ことで、見事に水を得ることができた (= $f(x) \geq 0$ が示された)、という展開です。

(2)においては、 $x > 0$ のときでないと、(1)の結果を $\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$ とすることができないことに注意しましょう。

では、少し手を動かしてみますか。15分をめどに、きっちりと示してくださいね。

問題 2-2.2 $x > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x \log x \geq -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \dots\dots *$$

解 $f(x) = x \log x + \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{2} \\ &= \log x + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + x - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \quad (x > 0)$$

従って、 $f'(x)$ は単調増加で、 $f'(1) = 0$ であるから、
 $0 < x < 1$ においては $f'(x) < 0$
 $x > 1$ においては $f'(x) > 0$
 である ($f'(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみ)。

従って、 $f(x)$ の増減は右のようで、
 たしかに $f(x) \geq 0$ ($x > 0$) であるとわかり、 $x > 0$ において * が成り立つことが示された。☺

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$ ですから、先ほどの例題のように「くみあげる」ことはできませんが、 $f'(1) = 0$ さえ見いだせば、流れは同様です。

では、次は 2 変数の不等式をみてみましょう。

問題 2-2.3 $a \geq b > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(a+b)(\log b - \log a) \leq 2(b-a) \dots\dots *$$

多変数の不等式を微分を用いて示す際には、

一つを変数、残りを定数とみて微分

するのが基本となります。

わかりやすくするために、* の a を x とおし、 b を正の定数とみて、(右辺) - (左辺) を x の関数

$$f(x) = 2(b-x) - (x+b)(\log b - \log x)$$

とみて、増減を調べてみましょう。

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 - (\log b - \log x) + \frac{x+b}{x} \\ &= \log x + \frac{b}{x} - \log b - 1 \end{aligned}$$

符号が分からないので、さらに微分すると

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{b}{x^2} = \frac{x-b}{x^2}$$

この符号はわかり、 $f'(x)$

の増減は右のようです。

これで、 $f'(x) \geq 0$ ($x \geq b$)

x	(0)	...	b	...	
$f''(x)$			-	0	+
$f'(x)$			↘	0	↗

がわかるので、 $f(x)$ は $x \geq b$ において単調増加で、 $f(b) = 0$ より、 $f(x) \geq 0$ ($x \geq b$) がいえました。

このような流れでの証明が基本となるのですが、この例題に対しては、実は一工夫することで、一変数の不等式に変えてしまうことが可能です。略解形式ですが、別解を紹介しておきましょう。

別解 $(a+b)(\log b - \log a) \leq 2(b-a)$ の両辺を b で割り、整理すると

$$\left(\frac{a}{b} + 1\right) \log \frac{b}{a} \leq 2\left(1 - \frac{a}{b}\right)$$

$$\iff 2\left(1 - \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{a}{b} + 1\right) \log \frac{a}{b} \geq 0$$

$t = \frac{a}{b}$ とおけば、 $t \geq 1$ であるから、示すべきは $t \geq 1$ のときの $g(t) = 2(1-t) + (t+1) \log t \geq 0$ の成立である。

$$g'(t) = -2 + \log t + \frac{t+1}{t} = \log t + \frac{1}{t} - 1$$

$g''(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2} \geq 0$ から、 $g'(t) \geq g'(1) = 0$ が

わかるので、 $g(t)$ ($t \geq 1$) は単調増加。

従って、 $g(t) \geq g(1) = 0$ ☺

変数の数が増えても、同じように「一つだけを動かす」という手法に進められるのは同様です。次の問題はどうかでしょう。え？ 文字が増えすぎだ、ですって？

そういうセリフは、手を付けてからいいましょう。30分を目安に、取り組んでみてください。

問題 2-2.4 a, b, c, x, y, z を正の数とする。

(1) $\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} \geq \frac{(a+b)^3}{(x+y)^2} \dots\dots \textcircled{1}$ を示せ。

(2) $\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} + \frac{c^3}{z^2} \geq \frac{(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2} \dots\dots \textcircled{2}$ を示せ。

解 (1) b, x, y を定数視して、(左辺) - (右辺)

を、 a の関数 $f(a) = \frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{y^2} - \frac{(a+b)^3}{(x+y)^2}$ とみると、

$$f'(a) = \frac{3a^2}{x^2} - \frac{3(a+b)^2}{(x+y)^2} = \frac{3(x+y)^2 a^2 - 3x^2(a+b)^2}{x^2(x+y)^2}$$

この分子を

$$3\{(x+y)a + x(a+b)\}\{(x+y)a - x(a+b)\}$$

と積の形で表わすことで、 $f'(a)$ の符号は

$$(x+y)a - x(a+b) = ya - xb$$

の符号に一致するとわかる。

よって、 $f(x)$ の増減は

右のようとなるので、

$$f(a) \geq f\left(\frac{xb}{y}\right) = \frac{x^3 b^3}{x^2 y^3} + \frac{b^3}{y^2} - \frac{\left(\frac{xb}{y} + b\right)^3}{(x+y)^2}$$

◆1 面積のさまざま

数 III

問題編

エック!

難易度

★★

問題 4-1.1

$y = \sin 2x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \cdots \cdots \textcircled{1}$, $y = k \tan x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right) \cdots \cdots \textcircled{2}$ の2つのグラフを考える.

- (1) ①, ②のグラフが原点以外で共有点を持つような実数 k の条件を求めよ.
 (2) k が(1)の条件を満たすときを考え, ①, ②の原点以外での交点を通る, x 軸に垂直な直線を l とする.

①, ②の囲む領域の面積 S_1 と, l , x 軸および②の囲む領域の面積 S_2 が $S_1 + 2S_2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$ を満たすときの k の値を求めよ.

エック!

難易度

★★

問題 4-1.2

$y = \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフと x 軸, y 軸とで囲まれる領域の面積が, $y = a \sin x$, $y = b \sin x$ (ただし $0 < a < b$) のグラフによって3等分されるという.
 a , b の値を求めよ.

エック!

難易度

★★

問題 4-1.3

領域 $x^2 - xy + y^2 \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$ の $x \geq 0$ の部分の面積を求めよ.

◇1 面積のさまざま

数 III

解説編

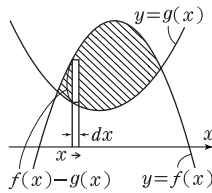
今回は、「面積」がテーマです。面積を求めよ、という要求の問題は確かによく目にしますが、たいていは「そこに至るまで」の部分にヤマがあるものであり、面積を求めること、それそのものが難しいというシーンは実はそう多くはありません。

ということで、基本として押さえなければいけない「面積を求める手法」は何か、をただだと確認してゆくことで、抵抗感を取り除く方向で進み、後半に応用的なものの方を見方を確かめる、という流れでゆきたいと思えます。

では、参りましょう。

§1 面積の基本

2曲線の囲む領域の面積は、よくご存知の通り、微小長方形の面積の足し合わせで立式できます。右図の状況であれば、 $(f(x)-g(x)) \times dx$ の総和が斜線部の面積となるわけです。



定積分=細かなものの和の極限

であり、縦に細かく分割することで面積を定積分で表わす、というのが基本中の基本なわけですね。

では、その基本が身についているか、をまず次の例題くらいで確認してみましょうか。

問題 4-1.1 $y = \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) ……①,

$y = k \tan x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) ……② の2つのグラフを考える。

(1) ①, ②のグラフが原点以外で共有点を持つような実数 k の条件を求めよ。

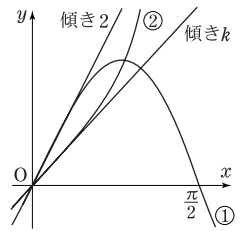
(2) k が(1)の条件を満たすときを考え、①, ②の原点以外での交点を通る、 x 軸に垂直な直線を l とする。

①, ②の囲む領域の面積 S_1 と、 l , x 軸および②の囲む領域の面積 S_2 が $S_1 + 2S_2 = 1$ ……③ を満たすときの k の値を求めよ。

①の $x=0$ での接線の傾きは ($y'=2\cos 2x$ より) 2で、

②の $x=0$ での接線の傾きは ($y'=\frac{k}{\cos^2 x}$ より) k で

すから、図形的に $0 < k < 2$ であろうとは分かりますが、ここはまじめに調べてみることにします。交点の x 座標は k で表わすことはできませんが、そこはさらりと「主役を変えて」で解決しましょう。



$$\text{解 (1)} \quad \sin 2x = k \tan x \iff 2 \sin x \cos x = \frac{k \sin x}{\cos x} \\ \iff \sin x (2 \cos^2 x - k) = 0$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $\sin x \neq 0$ だから、 $2 \cos^2 x = k$ なる

x ($0 < x < \pi/2$) が存在することが条件。

$2 \cos^2 x$ の値域が $0 < 2 \cos^2 x < 2$ であることから、

$0 < k < 2$ が求める条件。

(2) $0 < k < 2$ のとき、

$$\sin 2x - k \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} (2 \cos^2 x - k) \dots\dots \text{④}$$

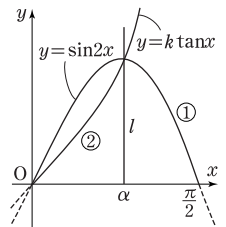
$2 \cos^2 x$ は単調減少ゆえ、 $\cos x = \sqrt{\frac{k}{2}}$ なる鋭角 x を α

とおけば、④は $0 < x < \alpha$ において

正、 $\alpha < x < \frac{\pi}{2}$ においては

負と分かるから、①, ②の上下関係は確かに右図のよう

に分かる、 $\cos \alpha = \sqrt{\frac{k}{2}}$ から



$$S_1 + 2S_2 = \int_0^\alpha (\sin 2x - k \tan x + 2k \tan x) dx$$

$$= \left[-\frac{\cos 2x}{2} - k \log |\cos x| \right]_0^\alpha$$

$$= -\frac{\cos 2\alpha - 1}{2} - k \log \cos \alpha = 1 - \cos^2 \alpha - k \log \cos \alpha$$

$$= 1 - \frac{k}{2} - \frac{k}{2} \log \frac{k}{2}$$

ゆえに、③のとき

$$1 - \frac{k}{2} - \frac{k}{2} \log \frac{k}{2} = 1 \iff \frac{k}{2} \left(\log \frac{k}{2} + 1 \right) = 0$$

$k \neq 0$ より $\log \frac{k}{2} = -1 \iff k = \frac{2}{e}$ で、これは確かに(1)の範囲にある。☉

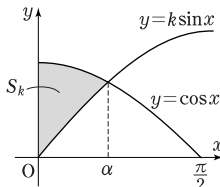
交点そのものが k で表わせなくても、いったん交点を文字で置いた上で、そのまま進めてしまえばよいのです。

では、似たような設定の問題で、少し手を動かしてみてください。20分を目安に、どうぞ。

問題 4-1.2 $y = \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフと x 軸、 y 軸とで囲まれる領域の面積が、 $y = a \sin x$ 、 $y = b \sin x$ (ただし $0 < a < b$) のグラフによって3等分されるという。
 a, b の値を求めよ。

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $\cos x$ は単調減少、 $\sin x$ は単調増加ですから、グラフの上下は明確です。「3等分」にこだわらず、一般の場合を考えて攻めるのが早いでしょう。

解 $y = k \sin x$ ($k > 0$) のグラフと $y = \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフ、および y 軸とで囲まれる領域の面積を S_k とおく。



2つのグラフの交点の x 座標は、 $k \sin x = \cos x$ の解で、 $\tan \alpha = \frac{1}{k}$ を満たす鋭角 α である。この α を用いれば、

$$S_k = \int_0^\alpha (\cos x - k \sin x) dx = \left[\sin x + k \cos x \right]_0^\alpha = \sin \alpha + k \cos \alpha - k$$

ここに、 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{k^2}{1 + k^2}$ より

$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + k^2}$ だから、

$$\cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}$$

ゆえに、 $S_k = \frac{1 + k^2}{\sqrt{1 + k^2}} - k = \sqrt{1 + k^2} - k$

$y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$) と x 軸、 y 軸との囲む領域の面積は $\int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$ であるから、 $S_a = \frac{2}{3}$ 、 $S_b = \frac{1}{3}$

よって、 $\sqrt{1 + a^2} - a = \frac{2}{3}$ 、 $\sqrt{1 + b^2} - b = \frac{1}{3}$ から a, b を求めれば、 $1 + a^2 = \left(a + \frac{2}{3}\right)^2$ 、 $1 + b^2 = \left(b + \frac{1}{3}\right)^2$ から

$a = \frac{5}{12}$ 、 $b = \frac{4}{3}$ と分かる。☉

陰関数型の曲線になっても、問題なく対応できるでしょうか？

問題 4-1.3 領域 $x^2 - xy + y^2 \leq 1$ ……① の $x \geq 0$ の部分の面積を求めよ。

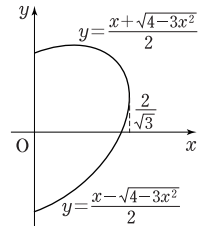
①を図示しにかりたくもなりますが(楕円の内部となります)、求積の上ではまったく不要です。

解 ① $\iff y^2 - xy + x^2 - 1 \leq 0$ を y の2次不等式とみて解くと、 $\frac{x - \sqrt{4 - 3x^2}}{2} \leq y \leq \frac{x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$

これを満たす実数 y が存在するのは $4 - 3x^2 \geq 0$ のときであるから、 $0 \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ の部分で

$$y = \frac{x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2},$$

$$y = \frac{x - \sqrt{4 - 3x^2}}{2}$$



の囲む領域の面積を求めればよい。

$$\frac{x + \sqrt{4 - 3x^2}}{2} - \frac{x - \sqrt{4 - 3x^2}}{2} = \sqrt{4 - 3x^2}$$

であるから、求める面積は

$$S = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \sqrt{4 - 3x^2} dx$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \theta \text{ と置換すれば } \begin{cases} x : 0 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

$dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta d\theta$ であるから、

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 |\cos \theta| \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \theta d\theta = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

パラメタ曲線がらみの求積も身につけていることでしょう。さすれば、次のような設定で出題されても、方針に迷うことはないと思います。

問題 4-1.4 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{5}} = 1$ ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) と x 軸、 y 軸とで囲まれる部分の面積 S を求めよ。

y について解こうとすると少し派手になってしまいますから、 $x = \cos^3 \theta$ 、 $y = \sin^5 \theta$ において、パラメタ曲線と軸との囲む領域の面積とみましょう。 x を $0 \leq x \leq 1$ で

あとがき

この数年で、私自身の生活環境は大きく変化いたしました。結婚、出産（私が産んだわけではないですが）、育児、と、新たなことばかりの毎日。

いくつになっても、「新しいこと」との出会いは新鮮です。そして、「学び」とは、まさにそれそのものでしょう。連載ものの原稿を書きはじめるとき、私は「さあ、何を考えよう」からスタートします。面白いもので、「何を書こう」ではなく、考えることから考えるわけです。ただ知っていることをつらつらと書いてゆくことほどつまらないものはありません。知っている、理解していることをもとに、新たな何かを突き詰めてゆくからこそ、「書く」ことが楽しくなる、そんな思いで筆を執っています。

今回、ⅢC版の出版にあたって、過去の連載に一通り目を通しました。自分が書いたことなはずなのに、妙に

新鮮に映るものや、「相変わらず今と似たようなことを言っているよなぁ」と、少し恥ずかしくなるところも。まあいろいろな思いが交錯しました。素直に、楽しかったです。大変、偉そうな言いぶりにはなりますが、自分の文章を自分自身が楽しめる、そんな自分が大好き。

みなさんも、どうぞご自身のことを好きになってください。私が本書を出すにあたって、なぜか一番強く感じたことです。

偉そうな話になってしまいましたね。最後は、本書を手にとってくれたすべての方々に感謝を申し上げて、締めくくりとさせていただきます。とりわけ、編集にあたってさまざまなサポートをいただいた坪田さんをはじめ東京出版編集部のみなさん、月刊誌「大学への数学」を通して素敵な交友関係を築いていただいた、ピーター・フランクル先生、栗田哲也先生、古川昭夫先生に、あらためて感謝の意を表したいと思います。

そして、我が家の長女、えみりあさん。おまけにはなるけれど、生まれてきてくれて、ありがとう。

※本書は、月刊『大学への数学』に、2017年～2024年に連載した“講義／数Ⅲ”から、抜粋・再編集・加筆したものです。

入試のツボを押さえる重点学習——数学ⅢC(平面上の曲線, 複素数平面)

2025年3月18日 第1刷発行

著者 青木亮二
発行者 黒木憲太郎
発行所 株式会社 東京出版
〒150-0012 東京都渋谷区広尾3-12-7
電話 03-3407-3387 振替 00160-7-5286
整版所 錦美堂整版株式会社
印刷所 株式会社光陽メディア
製本所 株式会社技秀堂製本部

落丁・乱丁本がございましたら、送料小社負担にてお取替えいたします。

©Ryouji Aoki 2025

Printed in Japan

ISBN 978-4-88742-288-9 (定価はカバーに表示してあります。)